

Support de cours 'Equations', ou mon petit 'Patchwork d'équations'

EM Alias RiMu

Novembre 2013



Navigation : [Contents \(Top\)](#) / [Index](#) / [Par Coeur](#) / [Sites Maths Online](#) / [End \(Down\)](#)

Contents

1	Idées	13
2	Introduction	14
3	Nombres, Théorie des ensembles, notations, opérations, propriétés, symboles, variables et inconnues	24
4	Expressions algébriques, égalités et identités, équations, fonctions, domaine de définition et généralités	32
5	Premiers calculs et égalités, expressions, propositions, formules, équations et fonctions	47
6	Opérations élémentaires	68
7	Calcul à la main nombres décimaux (rappels)	80
8	Propriétés, commutativité, parenthèses, associativité	82
9	Les opérations de base répétées	86
10	Equation à une variable (inconnue), nombre de solutions et ensemble de solutions ! CORRIGER SUITE, déplacer dans 2 VAR	92
11	Introduction aux Fonctions, Equation à deux variables (inconnues), dépendante et indép. (Equation décrivant une fonction)	93
12	Système d'équations linéaires à deux inconnues	109
13	Les inégalités	114
14	Exemple maths appliquées : circuit électrique, pont en H et RC	121
15	Les équations du 2ème degré et les paraboles	136
16	Problèmes importants impliquant des équations du second degré	157
17	Equations du 3ème degré, résolution avec Python et méthode de Cardan (Cardano)	169
18	Equations degrés 1, 2, 3 et 4, notes sur méthodes de résolution à la main	170
19	W : fonction de Lambert $x = W(x \cdot e^x)$	178
20	Fonction de Lambert et équations transcendantes	179
21	Manipulations algébriques et approximations	184
22	Méthodes numériques, implémentation série Taylor en Python 2	190
23	Les équations différentielles	191
24	Equations aux dérivées partielles	197

25 Les systèmes d'équations en général, problème des 3 corps	218
26 Liens vers sites maths utiles online	219
27 A savoir par coeur (uniquement pour moi, chacun son truc)	236
28 Index	256
29 Index Rama.pdf	259

DRAPET

Contents (detailed)

1	Idées	13
2	Introduction	14
2.1	Risques de plagiat, manque de références, limitations et avertissement	14
2.2	Pré-requis	14
2.3	Plan, conventions	14
2.4	Progression au sein d'un même chapitre	14
2.5	Préambule	15
2.6	L'algèbre	15
2.7	Mathématiques et équations, histoire et définitions élémentaires	16
2.7.1	De l'antiquité à nos jours	16
2.7.2	Découvre-t-on les mathématiques ou sont-elles une création de l'esprit humain ?	16
2.7.3	Commençons par un petit dialogue avec un outil LLM comme Gemini ou ChatGPT	16
2.8	Un peu de vocabulaire	21
2.9	Notations : Us et coutumes	21
2.10	A propos de ce qui paraît évident	22
2.11	Attention à nos certitudes (des fois trop habituel)	23
2.12	Par contre on peut souvent se fier à nos incertitudes (sans exagérer non plus)	23
3	Nombres, Théorie des ensembles, notations, opérations, propriétés, symboles, variables et inconnues	24
3.1	Nombres naturels N , N_0	24
3.1.1	Pair ou impair ?	24
3.1.2	Parité du nombre 0	24
3.1.3	Nombres premiers et nombres composés	24
3.1.4	Qu'en est il de 1 et de 2 ?	24
3.1.5	Crible d'Eratosthène	24
3.1.6	Nombre premier, composé et 0	24
3.2	Théorème fondamental de l'arithmétique	25
3.2.1	Nombres premiers entre eux, absence de diviseurs communs	25
3.3	Décomposition facteurs premiers	26
3.4	Ensembles, intersection, union, PGDC, PPMC, $AB \geq A \cup B \geq A \cap B$	26
3.5	Les bases, unaire, binaire, 10, 12, 16, 60, 360	27
3.5.1	Base unaire	27
3.5.2	Base binaire	27
3.5.3	Base dix	27
3.5.4	Base seize ou hexadécimale	27
3.5.5	Comment appelle on la base des chiffres Romains ?	27
3.5.6	Y aurait il une base meilleures que toutes les autres, une base "naturelle" ?	27
3.5.7	Bases 12, 60	28
3.5.8	Bases 12, 60, 360	28
3.6	Nombres relatifs Z	29
3.6.1	Droite des nombres entiers relatifs, positifs, négatifs, signe du zéro	29
3.7	Positifs, négatif et signe	29
3.7.1	Positif ou négatif ?	29
3.8	0, positif ou négatif ?	29
3.9	Lien entre les principaux ensembles de nombres	30
3.10	Pour aller plus loin : Nombres Complexes	31

3.10.1	Nombres Complexes, extension par op. inv.	31
3.11	Pour aller plus loin : Nombres Modulaire, arith.	31
3.12	Notations	31
4	Expressions algébriques, égalités et identités, équations, fonctions, domaine de définition et généralités	32
4.1	Egalités et inégalités	33
4.2	Egalités, connecteurs et logiques	33
4.3	Propositions, opérateurs, connecteurs logiques unaires et binaires	34
4.3.1	Prémises et conclusions	34
4.3.2	Negation \neg	34
4.3.3	Conjonction ET, AND, \wedge	34
4.3.4	Disjonction OU, OR, \vee	34
4.3.5	Implication \implies	34
4.3.6	L'implication \implies en mathématiques	37
4.3.7	Bi-implication \leftrightarrow	37
4.4	Dextérité (vacherie) : Faire trois négations avec deux connecteurs \neg	38
4.4.1	Simulations et vérifications	40
4.4.2	Récapitulation et mise en forme finale	41
4.5	Expressions algébriques : Nombres, lettres, opérateurs et symboles	42
4.5.1	Lettres alphabet latin	42
4.5.2	Lettres alphabet grec	42
4.6	Egalités, inégalités et identités en géométrie (petits rappels géom. euclid.)	42
4.6.1	Le prof qui abuse : Que vaut la somme des angles d'un triangle ?	42
4.6.2	Preuve 180° angles triangle	42
4.6.3	Loi des trois inégalités des triangles	42
4.7	Egalités vecteurs et matrices (tableaux de nombres)	43
4.8	Equations et égalités	43
4.8.1	Equations, domaine de définition et nombres de solutions	43
4.8.2	Equations Diophantiennes	43
4.9	Egalités/identités des nombres dans des bases différentes, représentation nombre, nombres périodiques	44
4.9.1	Utiliser une inconnue X, pour trouver la réponse	44
4.10	Identités, congruence, équivalence, proportionalité	44
4.11	Exemples notation dans expressions, formules et graphiques	45
4.12	Ordre opérations : PEMDAS	45
4.12.1	Ambiguïté (Voir article Wiki)	45
4.13	Equations et unité	45
5	Premiers calculs et égalités, expressions, propositions, formules, équations et fonctions	47
5.1	Premiers calculs et égalités	47
5.2	Expressions algébriques	47
5.2.1	Lettres alphabet latin	47
5.2.2	Lettres alphabet grec	47
5.2.3	Types de symboles pour opérations de base	48
5.2.4	Règles, propriétés et généralisation	48
5.3	Les formules avec leurs paramètres	49
5.4	Propositions et égalités	49
5.5	Valeurs de vérité des propositions	50
5.5.1	Pour aller plus loin : Extension des ensembles de nombres et des opérations de base	50

5.6	Les fonctions	50
5.7	Formules, courbes, équations et fonctions	51
5.8	Fonction suite (glacier)	51
5.9	La négation : la plus simple des fonctions ?	51
5.10	Fonction suite (compte en banque)	51
5.11	Fonction bijective (fonction plus rare)	52
5.12	Pour aller plus loin : Egalité/comparaison, affectation/redéfinition	53
5.13	Identités remarquables, manipulations et terminologie	54
5.13.1	Développer, factoriser, réduire, simplifier	54
5.14	Egalités et identités en géométrie, égalité des angles et des segments	55
5.15	Equations et égalités	55
5.16	Inconnues	55
5.17	Egalités/identités des nombres dans des bases différentes, représentation nombre, nombres périodiques	55
5.18	Utiliser une inconnue X, pour trouver la réponse	56
5.19	Rapports, fractions, et proportions, 4 ^{eme} proportionnelle	56
5.19.1	Exemple règle de trois, tableau et produit en croix	56
5.20	Les unités et les dimensions: une poule et demie pond un oeuf et demi en un jour et demi	57
5.21	Equation simple avec une seule inconnue : preuve que $0.999... = 0.\bar{9} = 1$	58
5.22	Démonstration de $0.999... = 0.\bar{9} = 1$ si en utilisant la notation éclatée en base 10 et une limite	58
5.23	Attention quand on manipule une infinité de nombres ! Extension des domaines de travail, ensemble des nombres, portée des opérateur etc.	58
5.24	Trucs pour mettre un nombre périodique sous forme de fractions	58
5.25	Problème impliquant des pourcentages, mais plus subtil, probabilité d'être négatif alors que le test COVID est positif	59
5.26	Pour réfléchir un peu au début	59
5.27	Deuxième version avec vrais/faux positifs	59
5.28	Troisième problème avec détails vrais/faux positifs/négatifs	61
5.29	Evolution des probabilités en fonction de la prévalence pour Sp et Se donnés	62
5.29.1	Sp=95%, Se=99%	62
5.29.2	Sp=70%, Se=99%	62
5.30	Pour aller plus loin : Théorème de Bayes	62
5.31	Pour aller plus loin : il en va de même dans certaines bases et dans les systèmes de représentation des nombres dans les ordinateurs.	63
5.32	Pour aller plus loin	63
5.33	Sur l'égalité et "l'identité/équivalence" des triangle, des segments, vecteurs etc. COPIER contenu doc EM équation implication et équivalence page 7 et explication implication Herb Gross	63
5.34	Algèbre de Boole	64
5.35	Algorithme simple : nombre premiers, tri	65
5.36	Calculabilité	65
5.37	Décidabilité	65
5.38	Pour aller plus loin : Prime reciprocal "inverse de"	66
5.39	Démonstration et preuve, force brute, calculabilité, décidabilité	67
5.40	Exemple module Python pour travailler avec de grands nombres	67
6	Opérations élémentaires	68
6.1	Opérations "directes"	68
6.1.1	Propriétés des puissances et colonnes de puissances	69
6.2	Opérations "inverses"	70

6.2.1	Propriétés logarithmes et exponentielles (puissances)	70
6.2.2	Pour aller plus loin : Remplacer une soustraction par une addition (le complément à 2)	71
6.3	Résumé opérations directes et inverses, extensions ensembles, vocabulaire	72
6.4	Pour aller plus loin : Tétration	73
6.4.1	Calcul Tétration sous forme de puissances et notation décimale	74
6.4.2	approximation Tétration, voir à vérifier : graphique, extension au domaine des nombre réels	75
6.5	Tétration où l'on fixe la base ($k=1.68$)	76
6.6	Tétration (suite), nombres énormes (googolplex) et notation de Knuth	77
6.6.1	Notation de Knuth	77
6.6.2	Notation de Knuth (suite)	78
6.6.3	Notation de Knuth (suite)	79
6.6.4	Exemple liste opérations élémentaires	79
7	Calcul à la main nombres décimaux (rappels)	80
7.0.1	Pour aller plus loin : crible d'Ératostène	81
8	Propriétés, commutativité, parenthèses, associativité	82
8.1	Associativité (suite), formes différentes	83
8.2	Distributivité	84
8.2.1	Résoudre, effectuer	84
8.2.2	Parité	84
8.2.3	Et zéro, positif ou négatif ?	84
8.2.4	Signes	85
8.2.5	Calcul de 10 racines carrées consécutives pour refaire la table de LOG	85
8.2.6	Film de Herb Gross	85
8.2.7	Pour aller plus loin : Groupe, anneau, élément absorbant, élément neutre etc.	85
9	Les opérations de base répétées	86
9.1	Les séries de sommes	86
9.2	Du plus simple au plus compliqué	86
9.3	Les sommes	87
9.4	Les substitutions	88
9.5	Convergences et existence de solutions des algorithmes qui suivent dans ce chapitre	88
9.6	Les limites de ces séries	88
9.7	Les produits	88
9.8	Les suites de produits et leur limite	88
9.9	Les factorielles	88
9.10	Les suites de divisions et les fractions continues 'sciences étonnantes'	89
9.10.1	Cas le plus simple : le nombre d'or	89
9.11	Série de Engel	90
9.12	Pour aller plus loin	90
9.13	Racines continues	91
9.13.1	Equations formes particulières	91
10	Equation à une variable (inconnue), nombre de solutions et ensemble de solutions ! CORRIGER SUITE, déplacer dans 2 VAR	92
10.1	COPIER page 5 de doc EM équations (simplifier texte précédent une fois la suite importée)	92
10.2	Variables dépendantes et indépendantes	92

11 Introduction aux Fonctions, Equation à deux variables (inconnues), dépendante et indép. (Equation décrivant une fonction)	93
11.1 Fonction sous forme explicite $y=f(x)$	93
11.2 Fonction sous forme implicite $f(y,x)=0$	94
11.3 Trouver les zéros d'une fonction, résoudre la ou les équations pour y parvenir	95
11.4 Equation implicite ou doubles fonctions, bijections	97
11.5 Différence entre Equation, fonction, opération et application	98
11.6 Rappel géométrie : points, segments, vecteurs	100
11.6.1 exercice : RDV spacial simple	100
11.7 La fonction linéaire ou une des égalités la plus simple : La droite	101
11.8 Les subtilités, les décalages et les dilatations	102
11.9 Décalages et les dilatations sur $y=x$	103
11.10 Aperçu de toutes les façons de définir une droite, usage et méthode habituelles	104
11.10.1 Aperçu d'autres formes d'équations pour une droite en 2D	104
11.10.2 Récapitulation par ordre croissant de difficulté des formes des fonctions d'une droite	104
11.10.3 Trouver l'équation de la fonction de la droite	106
11.10.4 Pour aller plus loin : Aperçu d'autres formes d'équations pour une droite en 3D	106
11.11 Matière à réflexion pour aller plus loin : début des systèmes à 2 ou plusieurs variables/inconnues et équations	107
11.12 Equations linéaires avec trois variables/inconnues	107
11.13 La fonction valeur absolue $y=abs(x)$	108
11.14 La fonction $reLu(x)$ utilisée dans les réseaux de neurones	108
12 Système d'équations linéaires à deux inconnues	109
12.1 Exercice de biais cognitif, essayez de résoudre ce problème sans poser les équations	109
12.2 Systèmes d'équations linéaires à N inconnues, systèmes paramétriques et/ou incomplets	110
12.3 Système de N équations écrites sur une seule ligne	112
12.4 Introduction aux matrices et résolution des systèmes d'équations à N inconnues, déterminant	112
12.5 Indépendance linéaire	113
13 Les inégalités	114
13.1 Première méthode	114
13.1.1 Format standart du tableau des signes	115
13.2 Seconde méthode	116
13.3 Systèmes d'inéquations	117
13.4 Test du triangle, triangle dégénéré	117
13.5 Matière à réflexion : pour aller plus loin avec le début des systèmes à plusieurs équations et inéquations	118
14 Exemple maths appliquées : circuit électrique, pont en H et RC	121
14.1 La croissance rapide des difficultés de résolution des problèmes mathématiques	122
14.2 Arrondir dès que possible	122
14.3 Calcul par ordinateur	122
14.4 Solutions exactes	123
14.5 Analyse du circuit et mise en équations	124
14.6 Méthode des Noeuds : somme des courants entrants dans un nœud égale à la somme des courants sortants	125
14.7 Comparaison de différentes méthodes	126

14.7.1	Création d'un exercice et vérification des résultats avec numériques	126
14.7.2	Résolution analytique et méthode de Cramer	126
14.8	Calculs à la main avec la méthode des Noeuds	127
14.8.1	Rappel méthode de Cramer :	127
14.8.2	Simplification grâce à une propriété de la méthode de Cramer :	128
14.9	Méthode des Mailles : la somme des tensions le long d'un circuit fermé est toujours nulle	129
14.10	Résolution de la matrice obtenue par la méthode des mailles	130
14.11	Calculs à la main avec la méthode des Mailles	131
14.11.1	Rappel méthode de Cramer :	131
14.12	Comparaison des réponses sous formes de R ou de G	132
14.12.1	Réponses sous formes de R	132
14.12.2	Réponses sous formes de G	132
14.13	Solution avec une astuce pour simplifier, le théorème de Thévenin	133
14.14	Calcul des U_{th} et R_{th}	134
14.15	Solution pour bien s'entendre avec son patron (Faire le plus vite possible)	135
15	Les équations du 2ème degré et les paraboles	136
15.1	Fonction carré et racine carrée	136
15.2	Fonction réciproques, propriété et technique de visualisation	136
15.3	Pour aller plus loin : Définition du nombre imaginaire i (Ensemble C)	137
15.4	Pour aller plus loin : Le plan complexe et les nombres imaginaires	138
15.5	Equations du second degré et polynômes	139
15.6	Trouver l'équation de la fonction de la parabole	140
15.7	Trouver l'équation de la fonction biquadratique $y = ax^4 + bx^2$	140
15.8	Trouver l'équation d'une exponentielle de base connue passant par deux points	140
15.9	Trouver l'équation d'une exponentielle décalée de base connue passant par deux points	140
15.10	Autres combinaisons de fonctions non linéaires qui nécessitent un système d'équations linéaires pour la solution	140
15.11	Trouver l'équation d'une exponentielle passant par 3 points	141
15.12	Exercice : Calculer le taux d'augmentation de la surface d'une sphère en expansion sachant que le rayon grandit à 3 mètres par seconde	141
15.13	Exercice : Désintégration radioactive	141
15.14	Exercice : Calcul d'extremum sans dérivées, prix pour un chiffre d'affaire optimal, calcul et analyse sommet parabole	141
15.15	Exercice : Distance d'une droite par rapport à un point	141
15.16	Exercice : Faire tourner les axes d'une parabole, changement de référentiel	141
15.17	Equations Diophantiennes ? dans Z^2 ?	142
15.18	Système d'équations déroutants mais pas compliqués	144
15.18.1	Qu'est ce que ça donne en 2D ?	144
15.19	Equation d'une parabole dans le plan :	145
15.20	Choses à savoir sur la Paraboles, caractéristiques	145
15.21	Retrouver la formule à partir de 'square completion I'	146
15.22	Retrouver la formule à partir d'opérations de décalages	148
15.23	Retrouver la formule à partir de 'square completion II'	149
15.24	Retrouver la formule à partir valeur moyenne et deltas	150
15.25	Viète vous le dirait tout de suite !	150
15.26	Trouver les racines de l'équation du 2ème degré à partir de leur somme et leur produit ou en d'autres termes leur moyenne et leur différence	151
15.27	Rappels	152
15.28	Paraboles et géométrie	152

15.29	Solutions complexes : traçage préliminaire de la courbe du module de $F(z)$	153
15.30	Autres Formes (deg2)	154
15.30.1	Paraboles	154
15.30.2	Ellipse ou cercle (si a et $b = 1$)	154
15.30.3	Hyperbole (a et b différents de 1 ?)	154
15.31	Fractions rationnelles et éléments simples	155
15.31.1	Multiplicité	155
15.32	Christmas equation	156
16	Problèmes importants impliquant des équations du second degré	157
16.1	Problème d'optimisation d'une grandeur : vente optimale d'un prix de billet de bus	157
16.2	Puissance soutirée à une batterie en fonction de l'appareil connecté	157
16.3	Système d'équations linéaires surdimensionné impliquant une équation non-linéaire pour sa résolution : Meilleure approximation, méthode des moindres carrés	158
16.4	Système d'équations linéaires à deux inconnues impliquant une équation non-linéaire pour sa résolution : calcul des valeurs et vecteurs propres d'une matrice (méthode par substitution)	159
16.5	Système d'équations linéaires à deux inconnues impliquant une équation non-linéaire pour sa résolution : calcul des valeurs et vecteurs propres d'une matrice (méthode matricielle)	160
16.6	Quantité de mouvement et énergie cinétique	162
16.7	Equations de degrés supérieurs et polynômes	164
16.8	Loi binômiale et calcul des coefficients I	164
16.9	Calcul des coefficients triangle de Pascal II	164
16.10	Loi binômiale et calcul des coefficients III	164
16.11	Théorème fondamental de l'algèbre	164
16.12	Equation du 4ème degré qui se simplifie (exceptions et trucs)	164
16.13	2 équations à 2 inconnues au 2ème degré (systèmes linéaires déguisés) :	164
16.13.1	Du même style	165
16.14	Autres systèmes à connaître	165
16.15	Théorème des racines rationnelles	166
16.16	Pour aller plus loin : dérivée partielle sous forme implicite de de la formule quadratique générale	167
16.17	Formule quadratique générale avec a, b et c fonction de X	167
16.18	Equations implicites pour représentation rotation courbes	168
17	Equations du 3ème degré, résolution avec Python et méthode de Cardan (Cardano)	169
17.1	Démo avec Python 2.7	169
17.2	Début du code cardan.py	169
18	Equations degrés 1, 2, 3 et 4, notes sur méthodes de résolution à la main	170
18.1	Equation degré 1	171
18.2	Technique pour les équations de degrés supérieurs	171
18.3	Equation degré 2	172
18.4	Equation degré 2, suite I	173
18.5	Equation degré 2, suite II	174
18.6	Equation avec un exposant fractionnaire	175
18.6.1	Equation de degré 2 (x^2) avec un radical (\sqrt{x})	175
18.6.2	Approximation zéros d'une équation avec exposant fractionnaire	175
18.7	Equation degré 3	176

18.8	Equation degré 4	176
18.9	Equation degré 5, Théorème Abel	177
18.10	Equation degré 6	177
19	W : fonction de Lambert $x = W(x \cdot e^x)$	178
20	Fonction de Lambert et équations transcendantes	179
20.1	W : fonction de Lambert $a^x = x^b$	180
20.2	W : fonction de Lambert $a^x + bx + c = 0$	181
20.3	W : fonction de Lambert $x^x + c = 0$	182
20.4	W : fonction de Lambert $e^x = \ln(x)$	182
20.5	W : fonction de Lambert $e^{x-a} = \ln(x)$	182
20.6	Autres équations	182
20.7	W : branches fonction de Lambert $z = W(n, z \cdot e^z)$	183
21	Manipulations algébriques et approximations	184
21.1	Méthode d'interpolation et extrapolation, approximations	184
21.1.1	Binôme de Newton	184
21.1.2	Série de Taylor (à ajouter : autres formes, Mac-Laurin etc.)	185
21.1.3	Approximation de l'intégrale de la fonction normale	186
21.1.4	Approximation de Padé	186
21.1.5	Comparaison fonction $\ln(x)$, Taylor et Padé	187
21.2	Approximation énergie particule	188
22	Méthodes numériques, implémentation série Taylor en Python 2	190
23	Les équations différentielles	191
23.1	Equations linéaires du 1er ordre : problème de Cauchy	191
23.2	Equations linéaires du 1er ordre SSM, séparations variables I	192
23.3	Equations linéaires du 1er ordre SSM, ...	192
23.4	Equations linéaires du 1er ordre SSM, séparations variables II	192
23.5	Equations linéaires du 1er ordre ASM, variation des constantes	192
23.5.1	Méthode analytique simple :	193
23.5.2	Prise en compte de la condition initiale :	196
23.5.3	Plot décharge condensateur :	196
24	Equations aux dérivées partielles	197
24.1	Three Important equations	197
25	Les systèmes d'équations en général, problème des 3 corps	218
25.1	Etude Ediff Schaum	218
26	Liens vers sites maths utiles online	219
26.1	Calculer en ligne avec petites calculatrices	219
26.1.1	Calculatrice Google : calcul itératif	219
26.1.2	Calculatrice scientifique	219
26.1.3	Calculatrice Hewlett Packard HP48 RPN (à installer)	219
26.1.4	Calculatrice haute précision (Ex: 100 chiffres après la virgule)	219
26.2	Traçage de courbes	220
26.2.1	Racines d'une équation (Ex: nombre d'or $x^2 - x - 1$)	220
26.2.2	Tracer une courbe avec Geogebra ou Desmos 2D (Ex: $2X + 10$)	220
26.2.3	Ploty : Tracer une courbe à partir d'un tableau Excel, liens avec Python, R, Jupyter	221

26.2.4	Mathway : Calcul et plot	221
26.2.5	Graphs et calculs sur fonctions 3D ou complexes	222
26.2.6	Tracer une fonction de la variable complexe Z dans le plan complexe	222
26.3	Outils de conversion, real to float etc.	223
26.3.1	Conversion d'unités (Ex : 1cm^3 en 1m^3)	223
26.3.2	Matrices et Plot, Calculatrices spécialisées (Déterminants, inversions etc.)	223
26.3.3	Finance, Calculatrices spécialisées (intérêts composés etc.)	223
26.3.4	Mise sous forme de fraction (Ex: $0.123\dots = \text{Num}/\text{Dénom}$)	223
26.3.5	Calculator and Had to know	223
26.3.6	Lambert W Function Calculator	223
26.4	Calcul symbolique : Mathematica Wolfram (Version limitée)	224
26.5	Brilliant : programme éducation scientifique payant	224
26.6	Calcul symbolique : Mathematica	225
26.7	Symbolic and Numeric Maths Toolbox Online (Matlab/Simulink, Matrix Laboratory)	225
26.7.1	Octave (Matlab for Ubuntu)	225
26.8	Mathcad, calcul numérique (free login)	225
26.9	Sage : Progs et Libs Python EDO, 2D, 3D, calcul différentiel etc.	225
26.10	Calculatrice symbolique (Ex: factoriser $a^2 - b^2$) (Connexion obligatoire ?)	226
26.11	Integral calculator online	226
26.11.1	Algorithms and Semi-algorithms	226
26.11.2	Risch algorithm	226
26.12	Programmation online avec Python	227
26.13	Calcul numérique avec Numpy et matplotlib de Python	227
26.13.1	Shortest way to plot a sinus	227
26.14	Scratch Online	228
26.15	R Online	228
26.16	Programmation no-code ou soft-code	228
26.17	Editeur équations Latex	228
26.18	Matcha : Online Math Editor (login with google)	228
26.19	Julia Online	228
26.20	Clojure for maths (for Ubuntu)	228
26.21	Chlorine, Atom environment for Clojure	229
26.22	Compare Clojure, R and Python coding styles (full implementation)	230
26.23	Problem used for languages comparisons : linear regression	230
26.24	Algorithm used for comparisons	231
26.25	Clojure full implementation example	232
26.26	Compare Clojure and Python coding styles (full implementation)	233
26.27	Compare Clojure, Python and R coding styles (Use Librarie's languages)	234
26.27.1	Simulateurs	235
27	A savoir par coeur (uniquement pour moi, chacun son truc)	236
27.1	base unaire, binaire et compléments à 2, half adder, full adder equation	236
27.2	Méthode de Cramer avec 2 inconnues	236
27.3	Le cercle trigonométrique et les principales fonctions associées	237
27.4	Identités trigo, limites de bases etc.	237
27.5	At first, what is a fraction ? Is dy/dx a fraction ?	238
27.6	What the difference between d/dx , dy/dx ?	238
27.7	What the difference between df/dx and partial df/dx ?	238
27.8	What the difference and derivative and integral in terms of indetermined form	238
27.9	Implicit derivative	238
27.10	Newton-Raphson method for finding a zero of a function	239

27.11	Derivative of the reciprocal function f^{-1}	239
27.12	Dérivée fonctions composées $f(g(x))'_x$	239
27.13	Parametric differentiation, what the advantage of the parametric form	239
27.14	Différence entre primitives et antidérivée	240
27.15	Donner la solution d'une EDO linéaire du 1er ordre sans second membres, solution homogène	240
27.16	EDO linéaires homogènes séparation des variables	242
27.17	EDO linéaires inhomogènes variation des constantes	243
27.18	EDO linéaires inhomogènes RC avec facteur intégrant	243
27.19	Mnémono pour retenir les dérivées de $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\tan(x)$	244
27.20	$\ln'(1+x)$, $(\frac{1}{1+x})'$, $\arctan'(x)$, $\operatorname{arccot}'(x)$, $\ln'(x)$, $\arcsin'(x)$, $\arccos'(x)$	244
27.21	Antidérivées $\frac{1}{x}$, $\ln(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$, $\sec(x)$, $\operatorname{cosec}(x)$, et que dire de e^x , $\sin(x)$, $\cos(x)$	245
27.22	Tables fonctions, dérivées	246
27.23	Tables fonctions, dérivées suite	247
27.24	Tables fonctions, dérivées et primitives	248
27.25	Le rôle important de la sinusoïde et de la puissance dissipée	249
27.26	Quel est le principe de l'intégration par partie ?	249
27.27	Quel est le principe de l'intégration par substitution ?	249
27.28	What is the meaning of reLu function, from which others functions is it derived, write the details	249
27.29	Quel est l'algorithme de calcul d'une racine carrée ?	249
27.30	Citer une conséquence très importante des fonctions paires ?	249
27.31	Identités remarquables intéressantes	250
27.32	Loi binômiale : forme simplifié avec puissance 7	250
27.32.1	Calcul de coefficients I : Règle de Newton	250
27.32.2	Calcul des coefficients II : Triangle de Pascal	250
27.32.3	Loi binômiale et calcul des coefficients III	250
27.32.4	Nombres de termes degré 2	250
27.33	Théorème des racines rationnelles	251
27.34	Série de Taylor et approximations (comparaison forme avec loi binômiale)	251
27.35	Approximation de Taylor ordre 4 pour Gauss	251
27.36	Approximation de Padé	252
27.37	Approximation de Padé degrés (2;2) pour Gauss	252
27.38	Séries, sommes, suites arithmétiques, harmoniques, et géométriques	253
27.38.1	Suites arithmétiques	253
27.38.2	Suite harmonique, $\ln(n)$, constante d'Euler-Mascheroni γ	254
27.38.3	Formule suite géométrique, 2 versions, somme partielle et limite à l'infini	254
27.39	Binôme de Newton, loi binômiale générale, factorielles	254
28	Index	256
29	Index Rama.pdf	259
29.1	End	260

1 Idées

Introduire la parabole après la série arithmétique ?

Les mathématiques sont à la fois un produit de l'esprit humain et une exploration d'une réalité qui nous dépasse !

2 Introduction

Ce document est une compilation de notes personnelles, de résumés, de présentations de concepts mathématiques en liens avec les sciences, l'électronique etc. concepts que je trouvais particulièrement beaux. Il parle beaucoup d'algèbre et d'équations. Au fil du temps j'ai fait un tri de ces notes et essayé de les mettre dans un ordre 'progressif et logique'.

2.1 Risques de plagiat, manque de références, limitations et avertissement

Comme ce n'est ni un cours, ni une thèse, il n'y a ni démonstrations rigoureuses, ni listes de références, ni citations, sources etc. Je fais beaucoup de copier/coller d'illustrations et de contenus sur internet. Je pense qu'on peut identifier facilement les parties qui ne sont pas de moi et même retrouver l'origine des copies en faisant de simples recherches Google. Ma touche personnelle se limite au choix, à l'ordre d'apparition des idées et à la façon d'introduire et d'expliquer les différents thèmes et définitions. Je n'essaie jamais de m'attribuer la paternité d'une idée ou d'un texte, voir de plagier un travail.

Comme j'ai donné pas mal de coups de main et de cours d'appui, ce document contient aussi des exemples basés sur les difficultés que j'ai souvent constatées chez les étudiants (à commencer par moi) et des problèmes que je ne trouvais pas évidents à expliquer. Attention, je répète, ce n'est pas un vrai cours de mathématiques et il n'y a pas de démonstrations rigoureuses. Je laisse ce travail aux vrais professeurs de mathématiques.

Certaines parties n'ont pas été mises au propre et ne contiennent que des calculs et des explications faits à la main, scannés et importés. Il n'y a pas de formalisme rigoureux, mais j'utilise des exemples intuitifs et simplifiés pour introduire les différents concepts.

2.2 Pré-requis

J'espère que les personnes ayant déjà eu de bonnes connaissances en mathématiques (algèbre et analyse) trouveront malgré tout un intérêt à lire certaines parties de ce texte. C'est une sorte de résumé et un texte de vulgarisation. Pour moi c'est une petite visite guidée de différents types d'équations que l'on ¹ rencontre en mathématiques et en sciences, ainsi que de quelques méthodes importantes permettant de trouver les solutions à ces équations. On parlera également des inéquations et des fonctions.

2.3 Plan, conventions

Comme je l'ai dit avant, les concepts ont été triés et devraient respecter une introduction linéaire. Il est donc conseillé d'en faire une lecture respectant l'ordre des différents points et chapitres. Les personnes n'ayant pas de connaissances concernant le calcul différentiel et intégral peuvent se contenter de ne lire que la première partie de chaque chapitre ou il devrait néanmoins y avoir des choses simples et intéressantes. Il devrait y en avoir pour tout le monde.

2.4 Progression au sein d'un même chapitre

Il y a une introduction logique et linéaire des concepts, regroupés par chapitres de difficulté croissante. Il faut donc suivre les chapitres dans l'ordre, chaque chapitre s'appuyant sur les définitions introduites dans les chapitres précédents à l'exception des contenus des sections suivants la mention "Pour aller plus loin". Ces sections sont optionnelles et ne sont pas nécessaires pour progresser dans les chapitres suivants.

¹A propos des "que l'on", il y a une citation de Voltaire (sauf erreur) qui ressemble à : "Je n'aime pas les "que l'on", je préfère les "qu'on".

2.5 Préambule

Pour certains les équations font partie des mauvais souvenirs. Pour d'autres elles sont devenues familières, elles semblent évidentes, ils les utilisent mais ont un peu oublié les théories de base, comme on oublie certaines règles de grammaire. Pour beaucoup d'entre nous, lorsqu'il s'agit de faire un bilan de nos propres connaissances au sujet des équations, les choses deviennent plus confuses, on a de la peine à faire le tri, à classer. On s'aperçoit que certains termes ne sont pas aussi évidents ou plus aussi clairs qu'il n'y paraît.

C'est que le domaine est vaste ! Des équations, du vocabulaire à savoir et des définitions, il y en a beaucoup ! Qu'il s'agisse d'équations linéaires du 1er degré, d'équations quadratiques (forme canonique, générale, factorisée), trigonométriques, logarithmiques, à une ou plusieurs inconnues, que ce soit des équations différentielles, aux dérivées partielles ou fonctionnelles, qu'elles comportent des intégrales, des vecteurs ou des matrices, les mêmes questions reviennent tout le temps : il y a-t-il une solution ? ou plusieurs ? Est-il possible de trouver une réponse exacte ? Quelle méthode de résolution utiliser ?

Quelqu'un a dit que l'une des conditions permettant de 'supposer'² que l'on a compris une théorie ou un concept est de pouvoir au moins donner un exemple et un contre exemple qui illustrent les propos. Alors même si certains spécialistes estiment que seules les démonstrations rigoureuses ont de l'importance, je pense que les images simplifiées, l'utilisation de différents types d'exemples faisant appel à nos différents sens sont une aide précieuse dans l'apprentissage d'une discipline et peuvent servir de point d'ancrage pour mémoriser des concepts autrement plus complexes et abstraits.

2.6 L'algèbre

L'algèbre est une branche des mathématiques qui s'occupe de la résolution des équations. L'école française 'Nicolas Bourbaki' entreprend de réécrire l'ensemble des connaissances mathématiques sur une base axiomatique : ce travail gigantesque commence dans le milieu du 20^{ème} siècle par la théorie des ensembles et l'algèbre, et confirme l'algèbre comme langage universel des mathématiques.

²Souvent on est sûr d'avoir compris quelque chose et il faut attendre de buter sur un problème particulier pour se rendre compte que notre perception laisse encore à désirer. L'aspect sensible relatif aux concepts et les exemples simplifiés ne sont certes pas très rigoureux durant l'apprentissage d'une discipline, mais ils sont humains. Ce sont souvent aussi de bons moyens mnémotechniques pour assimiler des théorie complexes.

2.7 Mathématiques et équations, histoire et définitions élémentaires

En guise d'introduction voici quelques paragraphes très succints et un petit jeu de questions/réponses avec une IA, en espérant qu'il n'y ait pas trop de bêtises à corriger !

2.7.1 De l'antiquité à nos jours

Depuis Thalès, Euclide et la géométrie des Grecs anciens, énormément de connaissances produites par les hommes se sont accumulées au fil des siècles jusqu'à la révolution engendrée par les travaux de Newton et son calcul différentiel, entre autres (Euler, Gauss, Fourier, la liste est trop longue). Les génies se sont succédés jusqu'au début du XXème siècle (Riemann, Prof d'Einstein, Rama etc.). Ces 150 dernières années se sont démarquées par la recherche d'un perfectionnement, d'un raffinement à l'extrême au niveau de la logique et des fondations et des fondements de tous ce qui est mathématiques. Les découvertes et les outils ne suffisent plus, il faut tout démontrer, tout prouver avec la plus grande des rigueurs (c'est même une quête de la rigueur absolue, atteinte ?). Dans ce cadre des travaux gigantesques ont été accomplis par Russel jusqu'à l'époque de l'école de Bourbaki.

2.7.2 Découvre-t-on les mathématiques ou sont-elles une création de l'esprit humain ?

Il y a déjà tellement de travaux et de livres ³ qui tentent de répondre à cette question que je me contenterai de reporter une belle citation qui me semble faire consensus : Les mathématiques sont à la fois un produit de l'esprit humain et une exploration d'une réalité qui nous dépasse ! ⁴

2.7.3 Commençons par un petit dialogue avec un outil LLM comme Gemini ou ChatGPT

- Est-il vrai qu'à partir de la fin du XIXème il y eut de grandes tentatives pour formaliser et axiomatiser les mathématiques en partant des travaux de Bertrand Russell et Alfred North Whitehead jusqu'à l'époque de l'école de Bourbaki. Quels sont les noms et les différences entres ces travaux ?

Absolument ! Vous avez tout à fait raison de mentionner les travaux de Bertrand Russell et Alfred North Whitehead. Leurs Principia Mathematica, publiés au début du XXe siècle, constituent une tentative majeure de formaliser et d'axiomatiser les mathématiques.

Le travail monumental réalisé par le groupe Bourbaki au XXème siècle pour refonder les mathématiques sur de nouvelles bases axiomatiques est connu sous le nom des Éléments de mathématiques.

Les Éléments de mathématiques constituent une série de traités mathématiques visant à présenter de manière rigoureuse et exhaustive les différentes branches des mathématiques.

- Ne pourrait-t-on pas dire qu'avec Bourbaki, c'est le langage formel inclus dans les mathématiques en partant avec des axiomes tel que la théorie des ensembles et que Russell et WhiteHead c'est l'étude des langages formels tout en faisant aussi des recherches sur la théorie des ensembles ?

On peut dire que Bourbaki et Russell Whitehead ont tous deux contribué à l'élaboration de langages formels pour les mathématiques. Cependant, leurs approches et leurs objectifs étaient différents. Bourbaki a mis l'accent sur la structure et l'unification des mathématiques, tandis que Russell et Whitehead se sont concentrés sur les fondements logiques.

Les deux approches utilisent des langages formels, mais les langages utilisés par Bourbaki et par Russell/Whitehead sont différents, bien qu'ils soient tous deux inspirés de la logique mathématique.

Si Bourbaki et Russell/Whitehead partagent un intérêt pour la formalisation, leurs objectifs étaient différents. Bourbaki visait à construire une synthèse des mathématiques existantes, tandis que Russell et Whitehead cherchaient à fonder les mathématiques sur des bases logiques solides.

Les travaux de Bourbaki ont eu un impact considérable sur l'enseignement et la recherche en mathématiques, mais ils se sont concentrés sur une partie relativement restreinte des mathématiques. Les Principia Mathematica, en revanche, visaient à couvrir l'ensemble des mathématiques et ont eu une influence plus profonde sur la philosophie des mathématiques.

³Par exemple "Matière à pensée", un ouvrage sous la forme d'un dialogue entre le neurologue Jean-Pierre Changeux et le mathématicien médaillé Field 1985 Alain Connes, tous deux professeurs au Collège de France.

⁴J'ai l'impression que cette phrase est un peu générique et que le mot 'mathématiques' pourrait être remplacé par beaucoup d'autres mots

- Quelle est la différence entre une théorie axiomatique et une théorie formelle ?

Excellente question ! Bien que les termes théorie axiomatique et théorie formelle soient souvent utilisés de manière interchangeable, il existe des nuances subtiles entre les deux.

Théorie axiomatique

Une théorie axiomatique est un système logique construit à partir d'un ensemble d'axiomes qui sont considérés comme des vérités de base et indémontrables au sein de cette théorie. À partir de ces axiomes, on déduit des théorèmes en utilisant des règles d'inférence logiques.

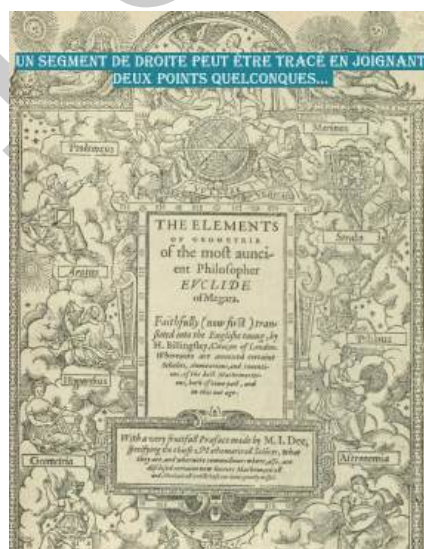
Théorie formelle

Une théorie formelle est un système logique plus abstrait qui se concentre sur la structure et les relations entre les symboles, plutôt que sur leur signification intuitive. Elle est construite à partir d'un langage formel (ensemble de symboles et de règles de formation) et d'un système de déduction.

Caractéristique	Théorie axiomatique	Théorie formelle
Focus	Contenu mathématique (objets, propriétés)	Structure logique et syntaxe
Langage	Souvent naturel, avec des termes spécifiques au domaine	Formel, avec des symboles et des règles de formation précises
Objectif	Démontrer des théorèmes	Étudier la structure et les propriétés des systèmes logiques
Exemple	Axiomes d'Euclide pour la géométrie	Calcul des propositions, logique du premier ordre

Une théorie axiomatique peut être considérée comme une instance d'une théorie formelle. Par exemple, la géométrie d'Euclide peut être formalisée dans un langage du **premier ordre**, ce qui en fait une théorie formelle. Cependant, une théorie formelle ne se limite pas à un domaine particulier des mathématiques.

- Pour la théorie axiomatique tu donnes l'exemple de la géométrie d'Euclide ⁵ que l'on voit assez tôt



à l'école d'ou un sentiment de proximité, on se sens un peu à la maison (ci-dessus un exemple des postulats que j'ai tiré du premier livre d'Euclide en ligne etc.). Par contre dans la théorie formelle, c'est quoi la logique du premier ordre exactement ?

⁵[https://fr.wikipedia.org/wiki/elements_\(Euclide\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/elements_(Euclide))

La logique du premier ordre est un système formel qui permet de raisonner de manière rigoureuse sur des énoncés. Elle est le fondement de nombreux domaines, des mathématiques à l'informatique en passant par la philosophie. La logique du premier ordre vous permet de quantifier sur des individus (des objets), "Tous les hommes sont mortels" ou "Il existe un nombre premier plus grand que 100". La logique du premier ordre fournit les outils pour construire de tels énoncés et pour déterminer leur vérité ou leur fausseté.

Les éléments clés de la logique du premier ordre sont :

* **Les variables:** Elles représentent des objets indéterminés (x, y, z, \dots). * **Les constantes:** Elles représentent des objets spécifiques (0, 1, Alice, ...). * **Les fonctions:** Elles associent à un ou plusieurs objets un autre objet ($f(x), g(x, y), \dots$). * **Les prédicats:** Ils expriment des propriétés ou des relations entre des objets ($P(x), Q(x, y), \dots$). * **Les connecteurs logiques:** Ils permettent de combiner des formules (et, ou, non, implique, ...). * **Les quantificateurs:** Ils permettent d'exprimer des notions d'universalité (pour tout) et d'existentialité (il existe).

Un exemple simple

Prenons l'énoncé "Tous les hommes sont mortels". En logique du premier ordre, on pourrait l'écrire :

$\forall x (Homme(x) \rightarrow Mortel(x))$

$\forall x$: Pour tout x $Homme(x)$: x est un homme $Mortel(x)$: x est mortel \rightarrow : Implique

Cet énoncé signifie que pour tout individu x , si x est un homme, alors x est mortel.

Exemple de lien entre la logique formelle et l'algèbre de Boole et l'électronique

L'algèbre de Boole est un système mathématique qui utilise des variables binaires (0 ou 1) pour représenter des états logiques (faux ou vrai). Elle est largement utilisée en électronique pour concevoir des circuits numériques.

La logique du premier ordre et l'algèbre de Boole sont liées de plusieurs manières :

* **Les connecteurs logiques:** Les opérations booléennes (ET, OU, NON) correspondent aux connecteurs logiques de la logique du premier ordre. * **Les circuits logiques:** Les circuits électroniques peuvent être représentés et analysés à l'aide de formules logiques du premier ordre. * **La vérification de circuits:** La logique du premier ordre est utilisée pour vérifier la correction des circuits logiques et pour prouver leur conformité à des spécifications.

Exemple :

Mettre une petite illustration d'un circuit électronique et ou électromécanique. Rappeler que tous calculs, même un calcul d'IA est un processus "simplement" mécanique, comme l'horloge de grand maman, qui dit je vous attend, ou la vieille caisse enregistreuse bruyante du café de la poste (pascaline). Des rouages, des engrenages, qui calculent, font des additions, des retenues, des multiplications, qui mémorise et donne le total, nos ordinateurs sont de la belle horlogerie moderne high tech mais fondamentalement ils sont du même genre au niveau de la complexité des système, ce en sont que de la mécanique silencieuse, même si ils ont un quad core et qu'il a fallu l'aide de la mécanique quantique pour les concevoir.

Un porte NON (NOT) en électronique correspond à la négation logique. Si A est une entrée binaire, la sortie NOT(A) est égale à 1 si A est égal à 0, et à 0 si A est égal à 1. En logique du premier ordre, on écrirait :

En résumé

La logique du premier ordre est un outil puissant pour formaliser le raisonnement et pour analyser des systèmes complexes. Elle trouve des applications dans de nombreux domaines, de l'intelligence artificielle à la vérification de logiciels. L'algèbre de Boole, quant à elle, est un cas particulier de la logique du premier ordre qui est particulièrement adapté à la description des circuits numériques.

* **Unifier les mathématiques:** En présentant les différentes disciplines mathématiques à partir d'un ensemble commun de concepts fondamentaux et de structures. * **Axiomatiser les mathématiques:** En formulant les théories mathématiques à partir d'un système d'axiomes rigoureux, permettant ainsi de construire des démonstrations solides et de garantir la cohérence des théories. * **Moderniser les mathématiques:** En intégrant les avancées mathématiques du XXème siècle et en les présentant dans un langage moderne et précis. **Les principales caractéristiques de ce travail sont:**

* **Une approche axiomatique:** Les *Éléments de mathématiques* adoptent une approche axiomatique, où chaque théorie est construite à partir d'un ensemble d'axiomes de base. * **Une grande rigueur:** Les démonstrations sont présentées de manière extrêmement rigoureuse, avec une attention particulière portée aux détails et aux justifications. * **Une grande généralité:** Les concepts sont introduits de manière très générale, permettant de les appliquer à un large éventail de situations. * **Une influence considérable:** Les *Éléments de mathématiques* ont eu une influence considérable sur le développement des mathématiques au XXème siècle, en contribuant à une standardisation des notations et des méthodes de démonstration.

L'héritage de Bourbaki:

Bien que le projet des *Éléments de mathématiques* n'ait pas été mené à son terme, il reste une référence incontournable pour tous ceux qui souhaitent approfondir leurs connaissances en mathématiques. L'approche axiomatique et structurale développée par Bourbaki a profondément marqué les mathématiques modernes et continue d'influencer les recherches actuelles.

Retenons que les éléments clés de la logique formelle (variables, fonctions connecteurs logiques etc.) sont utilisés tels quels dans le langage mathématique de base, entre autre, ainsi que dans l'algèbre de Boole utilisé en électronique, en informatique et dans les systèmes et les technologies les plus modernes que l'on utilise au quotidien.

- Parlons un peu de la logique du second ordre, essayons de cerner, en avons nous tous fait un peu sans le savoir ?

Si la logique du premier ordre vous permet de quantifier sur des individus (des objets), la logique du second ordre va plus loin en autorisant la quantification sur des ensembles d'individus ou sur des relations entre individus.

Qu'est-ce que cela signifie concrètement ?

Quantification sur les ensembles: Par exemple, vous pouvez exprimer l'énoncé "Il existe un ensemble de nombres entiers qui contient tous les nombres pairs" en utilisant un quantificateur sur les ensembles.

Cantor dans tout ça, \mathbb{R} plus grand que \mathbb{N} ?

Prise de tête, très grand nombre, calculabilité, halt problème, BB, tree() et la logique du second ordre ?

Découvre t on ou invente on les maths ? Il semblerait que l'on découvre les nombres premiers, en tout cas pour l'instant. Une fois que l'on aura construit une formule et que l'on pourra connaître tous les nombres premiers on pourra dire, on invente les maths. Mais c'est paradoxal car à ce moment on pourra objecter "oui, mais tu as découvert une formule qui te permet de trouver les nombres premier, donc tu n'invente pas les maths" ? que dire de ça ?

Même si nous parvenions à trouver une formule permettant de générer tous les nombres premiers, cela ne signifierait pas nécessairement que nous ayons "inventé" les nombres premiers. Nous aurions simplement découvert une nouvelle façon de les décrire. Les nombres premiers existeraient toujours, indépendamment de notre capacité à les exprimer sous forme de formule.

En conclusion, la question de savoir si l'on découvre ou invente les mathématiques est une question ouverte. Il est probable qu'il n'y ait pas de réponse unique et définitive. Les mathématiques sont à la fois un produit de l'esprit humain et une exploration d'une réalité qui nous dépasse.

Et ça va beaucoup plus, loin et la physique nous surprend, les maths nous permettant de lever des ambiguïté sur les nouveau paradigme de cette dernière ! Pensons aux expériences de l'inégalité de Bell a|b qui ayant été prouvée par Aspect nous a appris (violation des inégalités de Bell) que le monde est non local (deux photons issue d'une myriade de collision reste intriqués et constituent un seul système quelle que soit la distance qui les séparent et si on mesure, effondrement de la superposition, (influence qui change le résultat de l'exp mais ne viole pas les lois de conservation etc...) le spin de l'un d'entre eux, on trouvera immédiatement la valeur inverse en mesurant celui de l'autre photon préservant ainsi la loi de la conservation du spin et ce même si la distance

est de plusieurs années lumière. En apparence cela viole la relativité car c'est comme si une information était transmise instantanément. A savoir que ce n'est pas le cas car aucune information ne peut être transmise par ce moyen. En effet les mesures sur le photon numéro 1 donne des résultats aléatoires mais toujours complémentaires au photon numéro 2 (d'où la prise de tête), mais on ne peut pas influencer la valeur, c'est une mesure et la valeur n'est révélée qu'au dernier moment ou on fait la mesure. La vision "mécanistique" ou "matérialiste" (il n'existe d'autre substance que la matière, monisme, voir : l'homme machine etc.) (Selon le physicien Arthur Eddington (1929), la nouvelle conception scientifique du monde, fondée sur la physique atomique, remet en cause notre conception ordinaire du monde. Nous devons donc opter pour une nouvelle forme de matérialisme, plus conforme aux données scientifiques actuelles. Pour Eddington, notre concept ordinaire de table, par exemple, selon lequel la table est un objet stable et plein, est incompatible avec son équivalent scientifique, qui décrit un ensemble de particules mobiles dans un espace essentiellement vide. Aussi les concepts ordinaires et les concepts scientifiques ne peuvent-ils être conjointement vrais du même objet. Il faut choisir : Eddington choisit les concepts scientifiques et renonce aux concepts ordinaires.) <https://fr.wikipedia.org/wiki/Mat%C3%A9rialisme> du monde est remise en question c'est pourtant bien elle qui nous a mené au perfectionnement des calculateurs actuels les plus puissants dans les data center et qui nous permettent de continuer à explorer les maths en partie. Mais le monde n'est pas qu'un gros mécanisme dont les rouages se meuvent et s'influencent de proche en proche comme dans un réseau de neurone électronique, et la somme des parties est plus que ...

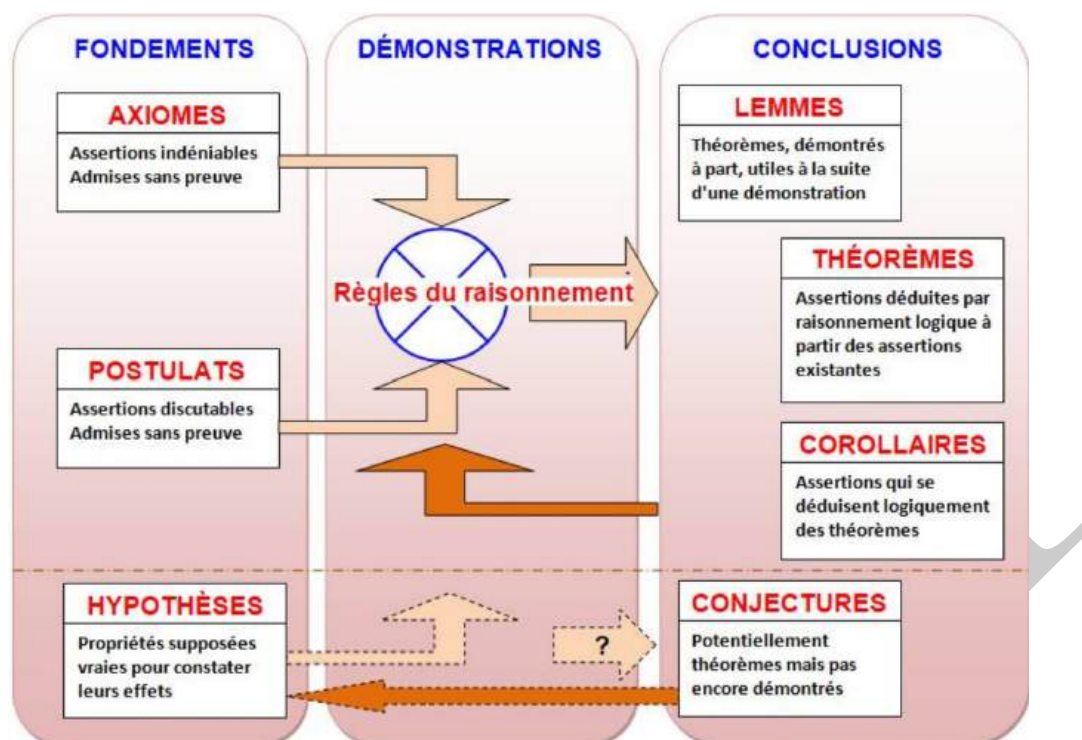
Autres délires non matérialiste: la question de l'origine de l'univers : dès que j'en parle je fais une phrase qui se contredit car <https://youtu.be/E55ZjWm6wQ4?t=2230> soit l'origine fait partie de l'univers soit elle est en dehors et lui est transcendant et donc on ne parle plus de l'origine, enfin un délire du genre, encore un fois je suis dépassé par la complexité de ce monde. Il y a des paradoxes dans ces analyses comme dans la théorie des maths. ces théories ne peuvent se suffire à elle-même. même un dieu puissant et infini ne peut être prouvé ou justifié avec des mots car n'arrive à des démonstrations contradictoires du style si dieu est infiniment puissant il ne peut rien y avoir en-dessus de lui on il ne pourrait créer un dieu plus puissant que lui donc il y a quelque chose qu'il ne peut pas créer donc il est limité donc un dieu ne peut pas exister etc... la relativité change les paradigmes en introduisant un espace temps, d'où l'énergie et la masse sont liées, idem pour E et M, et puis quoi d'autres. Le déterminisme semble avoir ses limites et il y a des choses non calculables et non appréhendables et mathématiques comme ailleurs pourtant ces choses ne semblent pas aléatoires, on aurait envie de dire qu'il n'y a pas besoin qu'il ait de vrai aléatoire pour qu'on ait l'impression qu'il y en a un, alors existe-il ce vrai hasard, la mécanique quantique semble dire que oui. Si on peut tout déterminer on pourrait inverser tout le mouvement et remonter le temps, le temps existe-t-il vraiment. Pourquoi il y a-t-il cette entropie qui semble donner un sens à l'écoulement du temps et de l'énergie ? après viennent les problèmes du libre arbitre. Dans la relativité générale en plus d'avoir cet objet bizarre qui est l'espace temps, ce dernier se déforme si il y a de l'énergie ou de la masse ? On découvre le principe d'équivalence qui ne dit pas tout car il faut encore expliquer les phénomènes de marées et de spaghettification. si je prends en compte l'étrangeté du principe de moindre action, l'enthalpie et les détails de la thermo, l'optique, les rotations et les toupies, finalement en physique et technique qui furent les occupations les plus grandes de ma vie, je ne suis pas allé bien loin, et je n'ai même pas réussi à comprendre la science de la fin du 19^{ème} siècle. je ne parle même pas de la chimie ni de la biologie,

How to unify logic and arithmetic

Eric helner

Alors contrairement à ces grands penseurs qui démontraient tout, je vais revisiter certains concepts divers des maths très intéressants qu'il est bon d'avoir en tête mais sans faire une seule démonstration.

2.8 Un peu de vocabulaire



2.9 Notations : Us et coutumes

2.10 A propos de ce qui parait évident

Nous savons tous que $1+1=2$, mais attardons nous un peu sur cette proposition et sur le texte suivant :

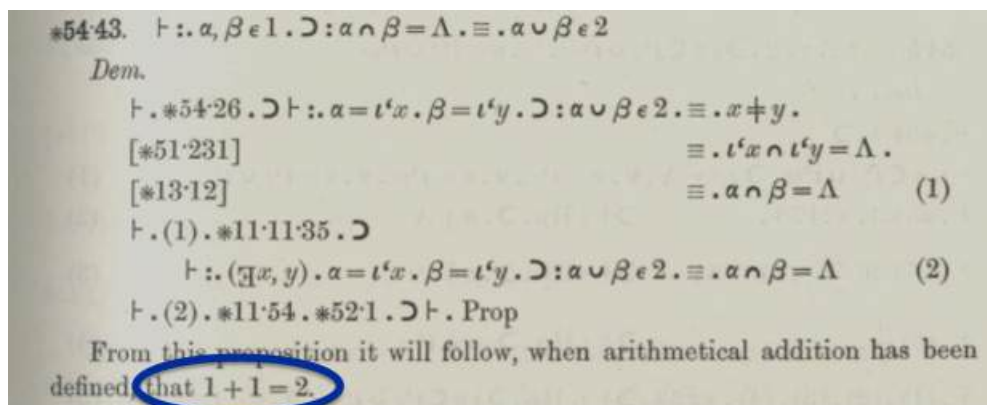


Figure 1: Démonstration correcte de $1+1=2$

Il s'agit de la démonstration de $1+1=2$ en langage symbolique de Whitehead et Russell telle quelle apparaît à la page 362 du premier des trois volumes de l'ouvrage intitulé Principia Mathematica, rien que ça !

Comme le dit si bien Michael Launay dans un de ses livres⁶ "N'essayer pas de comprendre quoi que ce soit dans cet agglutinement de symboles, c'est absolument impossible sans avoir lu les 361 pages précédentes, et même en les ayant lues, ce n'est pas franchement simple!"

Voir la vidéo de "Remi Explique", "[Explication - 6 - Pourquoi \$1+1=2\$?](#)"

⁶Voir 'Le grand roman des maths' de Michael launay, pages 269

2.11 Attention à nos certitudes (des fois trop habituel)

A la fin d'un développement algébrique il se peut que malgré toute notre attention la solution que l'on a trouvée ne soit pas correcte.

$$\begin{array}{l}
 a=b \\
 ab=b^2 \\
 ab-a^2=b^2-a^2 \\
 a(b-a)=(b+a)(b-a) \\
 a=b+a=2a \\
 1=2
 \end{array}$$

Figure 2: Démonstration erronée de $1=2$

2.12 Par contre on peut souvent se fier à nos incertitudes (sans exagérer non plus)

Ce que je veux dire par là, c'est qu'avec les maths c'est souvent facile de vérifier si on nous dit des conneries (l'inverse n'est pas vrai, voir le chapitre suivant).

Si il peut être très difficile voir impossible de trouver une solution exacte (essayez de résoudre à la main une équation du 5ème degré), vérifier qu'une solution est correcte est facile la plupart du temps.

Note : si on ne trouve pas de solutions ça ne veut pas dire qu'il n'y en a pas !

L'exemple qui suit montre une équation ainsi que toutes ses solutions (racines) car elle est mise sous la forme dite "factorisée". Si on nous dit "Cette équation admet $X=1$ comme solution", on voit immédiatement que c'est vrai en remplaçant X par 1 dans la première parenthèse. En effet cette dernière vaudra 0 et son effet sera d'annuler tout le membre de gauche.

$$(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)(X-5) = 0$$

Si on effectue toutes les multiplications de l'expression précédente on ne verra plus les racines. Le site suivant nous permet d'effectuer facilement ce calcul. Saisir l'expression et faire 'expand' :

<https://www.symbolab.com/solver/polynomial-multiplication-calculator>

$$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120$$

Figure 3: Equation 5ème degré

Il sera impossible de revenir en arrière car il n'existe pas de formule générale pour retrouver les racines dans le cas des équations qui dépassent le degré 4 (Voir Galois, groupes etc.). Il y a des exceptions, mais ce sont des cas très rares.

3 Nombres, Théorie des ensembles, notations, opérations, propriétés, symboles, variables et inconnues

3.1 Nombres naturels N , N_0

$N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, \dots \}$ (à l'origine pas de zéro, noté N^* ou $N_{>0}$) **A vérifier !**

3.1.1 Pair ou impair ?

Exemple de définition de la parité d'un nombre entier : Tout nombre différent de zéro multiplié par deux donne un nombre pair !

- Le résultat de l'addition d'un nombre relatif quelconque avec nombre relatif pair a la même parité que le nombre initial, exemple : 2 est pair donc $1 + 2 = 3$ et $2 + 2 = 4$ (Parité inchangée).
- Le résultat de l'addition d'un nombre relatif quelconque avec un nombre relatif impair a une parité opposé à celle du nombre initial, exemple : 3 est impair donc $1 + 2 = 3$ et $1 + 3 = 4$ (Parité changée).

3.1.2 Parité du nombre 0

Comme $N+0$ ne change pas le nombre N , 0 ne change pas la parité. Il est donc pair.

3.1.3 Nombres premiers et nombres composés

Un nombre premier est un nombre qui n'a que deux diviseurs **différents**, 1 et lui-même. Exemple : 7 et 11 mais pas 9 !

3.1.4 Qu'en est il de 1 et de 2 ?

Pour commencer prenons 1, bien qu'il soit divisible par le nombre 1 et par lui-même, notez la nuance, ce ne sont pas deux nombres différents, il n'est donc pas premier ! Pour 2, on sait que les nombres pairs sont divisible par 2 et par 1. Le nombre 2 n'est divisible que par 1 et par lui-même et ce sont deux nombres différents. 2 est donc le seul nombre pair qui est premier ! Tous les autres nombres premiers doivent être cherchés parmi les nombres impairs.

3.1.5 Crible d'Eratosthène

Pour trouver la liste de nombres premiers jusqu'à N , on écrit tous les nombres qui sont potentiellement des premiers, pour $N=27$:

2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27

et dès qu'on trouve un premier on enlève tous ses multiples qui suivent (3) :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25

ensuite (5) :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

c'est fini car il n'est pas nécessaire de chercher des nombres plus grands que \sqrt{N} c'est à dire dans notre cas $\sqrt{27} \approx 5.2$. En effet, le carré des nombres qui suivent 5 sont tous plus grands que 27, il ne peuvent donc pas être multiple de 27, exemple $7 \cdot 7 = 49$!

Un nombre composé est un nombre qui contient deux ou plusieurs nombres premiers identiques dans son développement $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$.

On peut diviser 0 par n'importe quel nombre mais la division par 0 est interdite (non définie). Donc le nombre 0 n'est donc ni premier, ni composé.

3.1.6 Nombre premier, composé et 0

0 n'est pas divisible par lui même, il n'est donc pas premier. Comme tout nombre composé est un produit de nombres premiers, 0 n'est donc pas composé. Il n'est ni premier, ni composé.

3.2 Théorème fondamental de l'arithmétique

Tout nombre entier strictement positif peut être écrit de façon unique sous la forme d'un produit de nombres premiers, c'est pour ça, entre autre, que l'on accepte pas 1 dans l'ensemble des nombres premiers, cela contredirait la définition précédente, en effet si on acceptait 1 on pourrait écrire :

$$35 = 5 \cdot 7 = 1 \cdot 5 \cdot 7$$

3.2.1 Nombres premiers entre eux, absence de diviseurs communs

On dit que deux entiers a et b sont premiers entre eux, que a est premier avec b ou premier à b ou encore que a et b sont coprimiers (ou encore étrangers) si leur plus grand commun diviseur est égal à 1 ; en d'autres termes, s'ils n'ont aucun diviseur autre que 1 et -1 en commun. De manière équivalente, ils sont premiers entre eux s'ils n'ont aucun facteur premier en commun.

Par exemple, 6 et 35 sont premiers entre eux, mais 6 et 27 ne le sont pas parce qu'ils sont tous les deux divisibles par 3. Le nombre 1 est premier avec tout entier, tandis que 0 est uniquement premier avec 1 et -1 . **A vérifier !**

3.3 Décomposition facteurs premiers

Voir "Crible d'Eratostène" et arrêt de la recherche pour $n = \sqrt{N}$

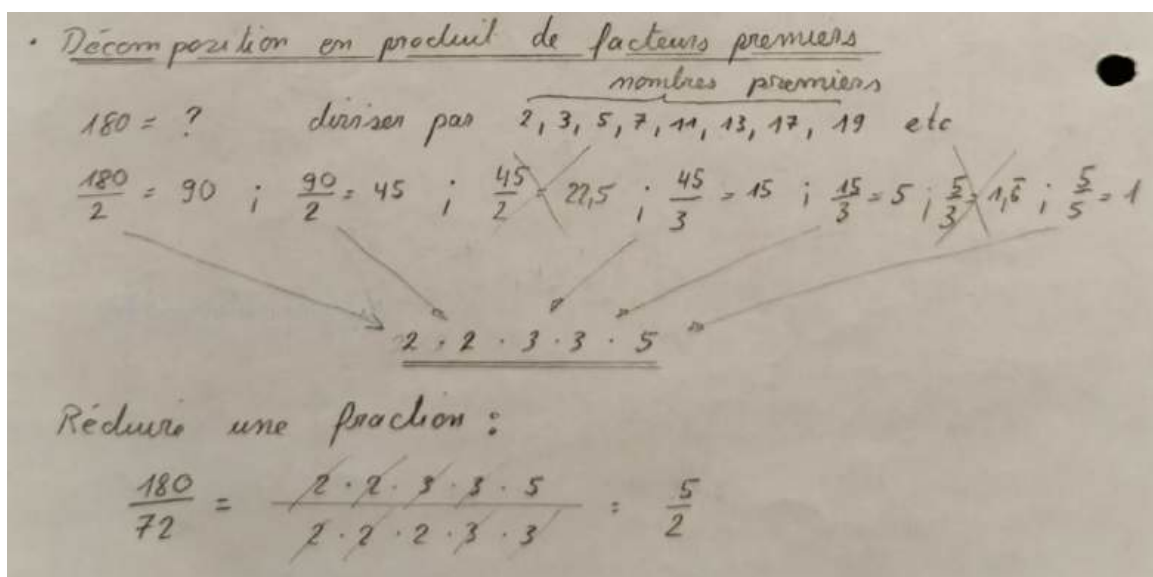
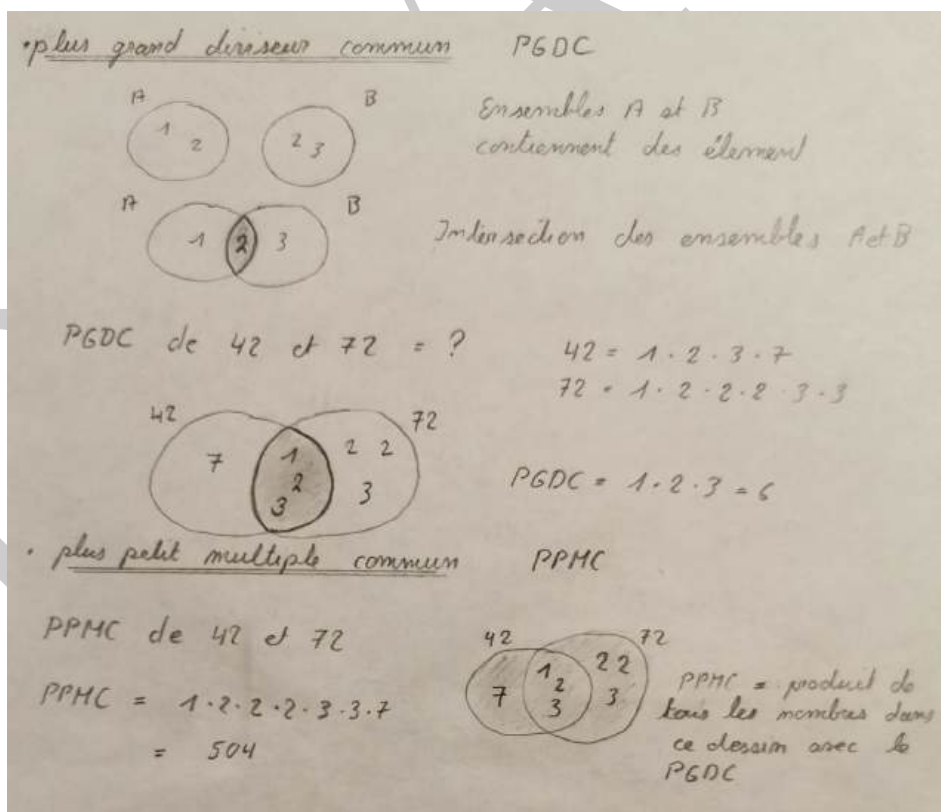


Figure 4: Décomposition en produit de facteurs premiers

3.4 Ensembles, intersection, union, PGDC, PPMC, $AB \geq A \cup B \geq A \cap B$

Opérations sur les ensembles : intersection, union, exclusion. (Ex : problème modulo, roue engrenage, $AB = (A \cup B)(A \cap B)$). Ajouter notes maths modernes, histoire etc.



$$PPMC(42, 72) = \frac{42 \cdot 72}{PGDC(42, 72)} = \frac{3024}{6} = 504$$

On verra plus loin comment faire une liste de nombres premiers, à la main pour des petites listes, et avec l'ordinateur pour de grande liste ou pour chercher si un nombre est premier.

3.5 Les bases, unaire, binaire, 10, 12, 16, 60, 360

3.5.1 Base unaire

La base unaire est la plus simple, il suffit de faire des coches (des traits) comme lorsqu'on est en prison ou qu'on compte les points dans une partie de cartes (Premières traces déjà dans l'antiquité sous forme de bâtonnets dessinés dans des plaques d'argile).

3.5.2 Base binaire

On entend beaucoup parler de la base 2, soit le binaire composée de 0 et de 1 (un bit, binary digit) car c'est le format de base de l'informatique moderne.

D'autres bases regroupant plusieurs bits sont aussi beaucoup utilisées en électronique/informatique (base quatre '2 bits, soit 4 valeurs dans certaines flash', octal 'base 8, trois bits', hexadécimal 'base 16, 'nibble, demi octet ou demi byte').

3.5.3 Base dix

On a dix doigts donc c'est une base pratique. Mais on verra plus loin les vrais avantages d'une telle base, surtout par rapport aux chiffres romains qui étaient écrits dans une base vraiment catastrophique pour faire des calculs (on ne parlera pas de ces chiffres).

3.5.4 Base seize ou hexadécimale

Cette base est très utilisé en électronique et en informatique car elle permet une représentation optimale de l'octet (byte), $11111111_{bin} = 255_{dec} = FF_{hex}$. Un byte est composé de deux nibbles (quatre bits). On utilise les symboles {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F }.

3.5.5 Comment appelle on la base des chiffres Romains ?

3.5.6 Y aurait il une base meilleures que toutes les autres, une base "naturelle" ?

3.5.7 Bases 12, 60

Si on compte sur les phalanges d'une des mains on peut atteindre le nombre 12. On place le pouce sur la première phalange et on le décale chaque fois que l'on ajoute 1. C'est aussi les endroits où ça fait mal quand on a la goutte.



Figure 5: Compter sur les doigts et les phalanges

Dès qu'on arrive à 12 on recommence l'opération. On compte les douzaines sur les 5 doigts de l'autre main et on arrive facilement à compter jusqu'à 60 sans se mélanger les pincesaux (on pourrait même imaginer compter sur les phalanges des deux mains ($12 \cdot 12 = 144$)).

3.5.8 Bases 12, 60, 360

En réalité 12 et 60 ont encore l'avantage d'avoir beaucoup de diviseurs, ce qui est très pratique pour faire des partages (divisions). Ce sont des nombres 'hautement composés', qui ont beaucoup de diviseurs (beaucoup plus que 14 ou 62).



Figure 6: Nombre de diviseurs pour 360 et 100

C'est encore plus remarquable avec 360 et c'est certainement pour cela que l'on divise le cercle en 360° degrés au lieu de 100 ou 400.

3.6 Nombres relatifs Z

3.6.1 Droite des nombres entiers relatifs, positifs, négatifs, signe du zéro

Un nombre positif est un nombre qui, additionné à un autre nombre, donne un nombre strictement supérieur.
Un nombre négatif, à l'inverse, donnera un nombre strictement inférieur. Dans ce contexte le nombre 0 n'est donc ni négatif, ni positif.

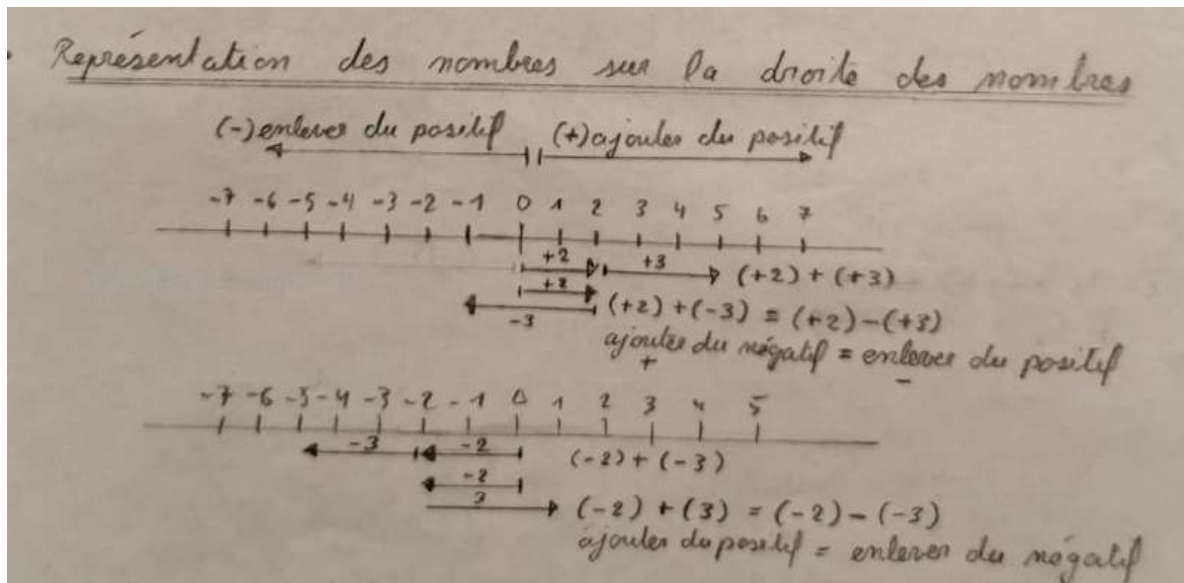


Figure 7: Droite des nombres

3.7 Positifs, négatif et signe

3.7.1 Positif ou négatif ?

Exemple de définition des nombres entiers positifs et négatifs (nombres relatifs Z) :

- Un nombre positif est un nombre qui, additionné à un autre nombre, donne un nombre strictement supérieur.
- Un nombre négatif, à l'inverse, donnera un nombre strictement inférieur.

3.8 0, positif ou négatif ?

En fonction de cette définition zéro n'est donc ni négatif, ni positif.

3.9 Lien entre les principaux ensembles de nombres

Comme on l'a montré dans les pages précédentes, en utilisant les opérations inverses de bases on n'obtient pas toujours des nombres appartenant à l'ensemble de départ. C'est par ce mécanisme que les ensembles de nombres ont été étendus de façon naturelle : ($3 = 4 + X$) donc ($X = 3 - 4 = 0 - 1 = -1$) qui est appelé nombre négatif, faisant partie de l'ensemble des relatifs. (Voir démonstration de Feynman dans annexe mathématique physique I).

- Naturels originels (sans 0) N^* (N_0) : 0, 1, 2, 3, 4, ...
- Naturels N ($N_{>0}$) : 0, 1, 2, 3, 4, ...
- Entier relatifs Z : 1,-1, 2,-2 etc. (nécessaires pour résoudre $X + 5 = 3$, que vaut $X=?$)
- Entiers relatifs strictement positifs Z_+ : 1,2,3,4,... (Les nombres naturels sans le zéro)
- Rationnels Q : $1/2, -1/2$ etc. (nécessaires pour résoudre $2 * X = 1$, que vaut $X=?$)
- Décimaux D : $1/3, 0.3333...$ etc. (nécessaires pour résoudre $2 * X = 1$, que vaut $X=?$)
- Irrationnels : irrationnel qui ne peut pas être mis sous la forme d'une fraction (racine de 2)
- Réels R : 1, $-1/2$, Racine(2),
- Constructibles ($\sqrt{2}$, ϕ , etc.)
- Algébriques : solutions d'une équation polynomiale (ou d'une équation algébrique ayant un nombre fini de termes et ne contenant pas de nombres transcendants ?), $2^{\frac{1}{3}}$ etc.
- Transcendants : irrationnel non algébrique donc qui n'est solutions d'aucun polynôme (ou d'expression algébrique contenant un nombre fini de termes ?), π , e etc.
- Complexe C : $1+3j$ etc. (nécessaires pour résoudre $X * X = -1$, que vaut $X=?$)
- Normaux ? 0.23571113172329... constantes (revoir numberphile)

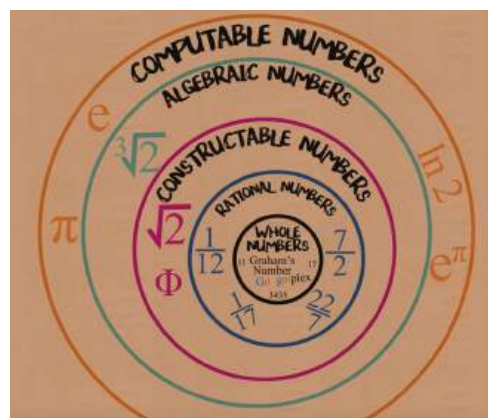
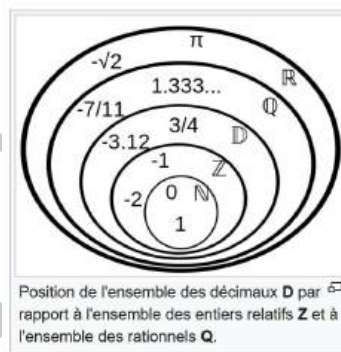


Figure 8: Ensembles de nombres

3.10 Pour aller plus loin : Nombres Complexes

$$i^2 = -1$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$$

$$e^{i\pi} = -1$$

3.10.1 Nombres Complexes, extension par op. inv.

(Voir démonstration de Feynman dans annexe mathématique physique I) En partant d'une dizaine de racine carrée faite à la main, on va arriver à des relations du genre :

$$e^{i\pi} = -1$$

3.11 Pour aller plus loin : Nombres Modulaire, arith.

On va donner deux ou trois explications sur leur origine et on partira de la définition de la division entière.

3.12 Notations

On peut aussi définir un ensemble en donnant la liste de ses éléments.

- $N_1 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (l'ensemble N_1 est l'ensemble des nombres plus petits que 10)
- $\{\}$ (ensemble vide)
- Si 1.5 et 2.7 sont les deux solutions d'une équation on notera que l'ensemble des solutions est $S = \{1.5, 2.7\}$
- Ouverts et fermés : S contient des réels et $S =]0..10]$, donc l'ensemble S contient l'intervalle 0 à 10, 0 n'étant pas compris (ouvert) dans l'ensemble.
- On utilise le symbole \in pour dire qu'un élément appartient à un ensemble, exemple :

$$5 \in N_1$$

- Division normale en Python : $4/3 = 1.3333333333$
- Division entière en Python : $4//3 = 1$
- Reste de la division en Python, modulo : $4 \bmod 3 = 7 \bmod 3 = 1$. Même si ces deux divisions donnent deux résultats différents 1 et 2, le reste est le même 1. Voir congruence.

4 Expressions algébriques, égalités et identités, équations, fonctions, domaine de définition et généralités

Nous allons essayer de donner une définition simple à chacun des termes du titre de ce chapitre.

Nombres / Ordre / Opérations / Expressions / Calculs / Résultats / Paramètres (lettres remplacent des nombres) / Connecteur équivalence ($=$) / Formules (périmètre) / Dimensions (géométrie, point, ligne, surface etc.) / inconnues / Equations / Fonctions

- Nombres naturels, ordre et ensembles
- Nombre 0
-
- Opérations élémentaires $+1, +$
- Dimension 1 et ligne des nombres positifs (positions)
-
- Expressions et calculs $23 + 512 + 8$
- Résultats et signe égal $2 + 3 = 5$
-
- Opérations élémentaires \times
- Dimension 2 et plan et points avec coordonnées (positions)
- Carré d'un nombre $3 \cdot 3$
- Opérations élémentaires réciproques $-$
- Nouveaux ensembles de nombres \mathbb{Z}
-
- Opérations élémentaires réciproques \div
- Nouveaux ensembles de nombres \mathbb{Q}, \mathbb{D}
- Rapport, fractions et périodes $1 = 0.9999$
-
- Opérations élémentaires puissances 3^2
- Opérations élémentaires réciproques $\sqrt{9}$
- Nouveaux ensembles de nombres \mathbb{R}, \mathbb{C}
-
- Formules, égalités avec expressions (équivalence), paramètres et constantes (Lettres qui remplacent les nombres)
-
- Equations, égalités logiques, liens entre expressions algébriques, valeur vraie ou fausse
-
-
-
-
-
-

-
-
-
-
-

Une **expression algébrique est une combinaison de symboles, termes**, nombres, lettres alphabet latin (inconnues, variables, paramètres), lettres alphabet grec (paramètres, constantes) appartenant à des ensembles \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{D} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} (Nombres naturels, relatifs etc.), de caractères spéciaux (flèches pour vecteurs, racine carrée, opérations arithmétiques etc., opérateurs logiques etc.), de mot (noms de fonctions comme le sinus), signes de ponctuation, parenthèses, vecteurs, matrices etc.

$$\frac{X}{2\pi} + 2\sigma + 3bY^2 + (\alpha_0 + k) - 0.\overline{142857}t$$

4.1 Egalités et inégalités

Une **égalité est une proposition** s'écrivant à l'aide du **signe égal '='** et **séparant deux expressions algébriques** ou mathématiques de même nature (nombres, vecteurs, ensembles etc.). Une égalité a donc tj 2 expr ou membres. Lorsqu'on ne connaît pas encore un nombre dans une égalité du genre $5 = 3 + 2$ on peut remplacer le nombre en question par un symbole (une lettre), par exemple $5 = X + 2$.

Une proposition contenant une égalité, ou une inégalité, peut être vraie ou fausse : en ce sens, elle a aussi une valeur logique dite valeur de vérité. Si elle est vraie on peut toujours la réduire à la forme $0 = 0$. Si une égalité est fausse on peut toujours la réduire à la forme $0 = 1$. **On a donc le droit d'écrire $1 + 1 = 3$ si on spécifie que cette égalité est fausse.** D'ailleurs l'outil informatique Wolfram (accessible online) accepte ce genre d'assertion, il ne met pas d'erreur d'input, il dit simplement que c'est faux :

Input :

$$1 + 1 = 2 + 4$$

Output :

Faux

On peut également cumuler les égalités : $3 = 2 + 1 = 6/2$. Si nécessaire on doit aussi indiquer sur quel ensemble de nombres ou domaine de définition, cette égalité a un sens (Ce qui revient à dire quels sont les nombres que l'on a le droit d'utiliser, par exemple l'ensemble des nombres réels positifs).

4.2 Egalités, connecteurs et logiques

statement, proposition, clauses, prémisses, déductions, réciproque, contraposée.

4.3 Propositions, opérateurs, connecteurs logiques unaires et binaires

https://fr.wikipedia.org/wiki/Calcul_des_propositions

Une **proposition** est une phrase ou un énoncé⁷ qui peut être vraie ou fausse, sans ambiguïté. Elle a une **valeur de vérité**. La phrase "La Suisse est en Europe" est une proposition vraie. La proposition suivante $2 + 2 = 5$ est une **égalité** fausse.

<https://zestedesavoir.com/tutoriels/2256/de-la-logique-aux-processeurs/la-logique-des-propositions-et-des-predicats/>

En mathématique une **égalité** est constituée de deux **expressions algébriques** séparées par le signe égal. Sa valeur de vérité peut être vraie ou fausse.

- Le principe de **non-contradiction** : une proposition ne peut être vraie et fausse en même temps.
- Le principe du **tiers-exclu** : une proposition est vraie ou alors sa négation est vraie, et inversement.

La phrase "Votre pays est en Europe" n'est pas une proposition, mais un **prédicat** car sa valeur de vérité dépend de son contenu (ici le pays). Il en va de même pour l'**équation** $X + 7 = 10$ qui peut être vraie ou fausse en fonction de la valeur de la lettre X (variable ou inconnue).

En mathématiques les valeurs qui ne sont **pas 'fixes'** comme des nombres $2, \pi$ sont souvent représentée par des **lettres latines** et portent le nom de **variables ou d'inconnues** selon le rôle qu'on leur a attribué. Ainsi on parlera d'inconnue quand on cherche une valeur et de variable lorsqu'on introduit une valeur.

Une **équation est une égalité particulière** qui contient **une ou plusieurs variables ou inconnues** et dont la valeur de vérité peut être vraie ou fausse. Résoudre une équation revient à chercher la ou les conditions, de façon à ce que la valeur de vérité soit vraie.⁸

4.3.1 Prémisses et conclusions

Aristote a déclaré que tout **argument logique pourrait** être réduit à deux **prémisses** et une **conclusion**. Par exemple : "Socrate est mortel car tous les hommes sont mortels"

<https://fr.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A9misse>

https://fr.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A9misse_fausse

4.3.2 Négation \neg

4.3.3 Conjonction ET, AND, \wedge

La phrase "Mais où est Ornica" ? contient, à l'oral, toutes ces conjonctions (mais, ou, et, or, ni, car) et permet donc de les mémoriser facilement. Attention toutefois à l'orthographe qui diffère ! Traditionnellement classé parmi les conjonctions de coordination, donc est désormais considéré, au vu de son fonctionnement syntaxique différent des autres conjonctions (il peut être déplacé au sein de la phrase), comme un adverbe de relation.

4.3.4 Disjonction OU, OR, \vee

4.3.5 Implication \Rightarrow

A	C	$A \Rightarrow C$
True	True	True
True	False	False
False	True	True
False	False	True

⁷Déclaration, statement etc.

⁸Trouver la ou les valeurs de l'inconnue ou des inconnues.

En logique des propositions, l'implication, qui est représentée par le symbole \implies , est un connecteur binaire. C'est un lien logique qui crée une nouvelle proposition à partir de deux propositions existantes.

$$A \implies C$$

On dit aussi que la proposition A, l'impliquant ou "Antécédent", implique la proposition C, l'impliqué ou "Conséquent".

En Français on peut remplacer l'implication par "si ... , alors ...", "... implique ..." ou encore "... seulement si ...".

Le problème vient du fait que l'implication nous donne une information sur le conséquent seulement si l'antécédent est vrai (le conséquent est aussi vrai). Par contre si l'antécédent A est faux on ne peut rien dire à propos du conséquent C !

La **réciproque** : $C \implies A$

La **contraposée** : $\neg A \implies \neg C$

Par exemple si qq affirme : si il pleut je prend mon parapluie, il faut faire attention aux déductions.

Il nous dit que son affirmation est vraie, on le croit. Faisons une table de vérité :

- 1) Il pleut, il prend son para. (Tu l'as dit mon pote, affirmation de départ, affirmation vraie)
- 2) Il ne pleut pas, il ne prend pas son parapluie (Pas de contradiction, affirmation vraie)
- 3) Il ne pleut pas, il prend son parapluie (Pas de contradiction, affirmation vraie)
- 4) Il pleut, il ne prend pas son parapluie (faudrait savoir, il se contredit, contradiction, affirmation fausse)

Pluie	Para.	Affirmation
Vrai	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai
Vrai	Vrai	Faux

Avec des opérateurs logiques,

$$\neg A \wedge C \text{ ou alors } \text{NOT } A \text{ OR } C$$

On ne retiendra que les affirmations vraies :

Pluie	Para.	Affirmation
Vrai	Vrai	Vrai
Faux	Faux	Vrai
Faux	Vrai	Vrai

Ce qu'on peut en déduire en simplifiant au maximum :

Si pluie	alors para.
Vrai	Vrai
Faux	?

Que puis-je dire si je le vois avec son parapluie ?

Si para.	alors pluie
Vrai	?
Faux	Faux

DRAPET

4.3.6 L'implication \implies en mathématiques

On a le même problème avec :

$$X = 2 \implies X^2 = 4$$

qui est vraie mais dont la réciproque n'est pas toujours vraie,

$$X^2 = 4 \implies X = 2$$

A corriger : Effacer antécédent et conséquent dans le tableau

Antécédent $X^2=4$	Conséquent $X=2$
FAUX	FAUX $X \neq 2$
VRAI	VRAI ? FAUX $X=2$ $X=-2$

4.3.7 Bi-implication \leftrightarrow

https://en.wikipedia.org/wiki/Logical_biconditional

"équivalent à"

$$A \leftrightarrow C$$

si et seulement si (il pleut),

4.4 Dextérité (vacherie) : Faire trois négations avec deux connecteurs \neg

On sait que pour faire NA, la négation de A, il faut un connecteur unaire de négation. Si en plus, on veut faire NB, la négation de B, il nous faudra un deuxième connecteur de négation indépendant. Le principe est on ne peut plus simple, néanmoins on peut rencontrer une situation assez surprenante.

$$NA = \neg A, NB = \neg B$$

On a donc NA et NB qui dépendent respectivement de A et de B et utilisent deux connecteurs unaires séparés. On résume cette situation de cette façon :

$$(NA, NB) = F(2\neg, A, B)$$

Il est possible de faire la négation NC d'une troisième valeur C sans ajouter d'opérateur de négation supplémentaire, mais en utilisant des conjonctions et des disjonctions. Le résultat devra être équivalent à ce qui suit :

$$NA = \neg A, NB = \neg B, NC = \neg C$$

Exercice : Générer ces trois négations en n'utilisant que 2 opérateurs de négations, m conjonctions et n disjonctions tout en minimisant $m + n$:

$$(NA, NB, NC) = F(2\neg, m\wedge, n\vee, A, B, C)$$

On constate qu'on peut générer NA = vraie en tenant compte du nombre de valeurs A, B et C vraies simultanément ainsi que de combinaisons de ces dernières. On voit que NA est vraie si (et seulement si) au moins? Un des trois cas suivants se présente :

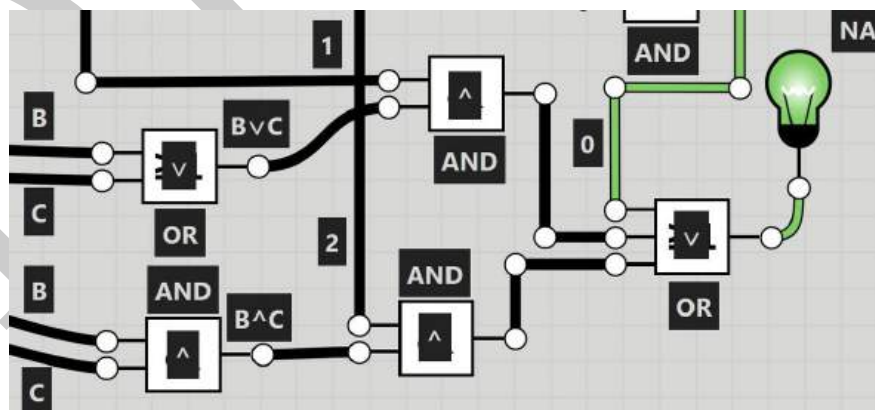
- 0 est vrai = aucune des valeurs A, B et C n'est vraie.
- 1 est vrai = une valeur est vraie, mais cela doit être B ou C.
- 2 est vrai = deux valeurs sont vraies et cela doit être B et C.

Comme 0, 1 et 2 sont les valeurs mutuellement exclusives qui représentent le nombre de valeurs vraies parmi A, B et C, la valeur de NA et par symétrie de NB et NC valent :

$$NA = 0 \vee (1 \wedge (B \vee C)) \vee (2 \wedge (B \wedge C))$$

La figure ci-dessous est une vue graphique de l'expression précédente. En électronique on rencontre partout ce genre de schéma représentant les fonctions logiques à effectuer au moyen de composants. Les symboles sont différents mais le principe est le même.

A gauche on a les entrées B et C qui sont inactives (faux ou inactif = teinte noire, vrai ou actif = teinte verte = lampe allumée). On trouve aussi les trois signaux 0, 1 et 2 décrits précédemment.



Enfin à droite on voit la sortie NA dont la valeur est vraie. En effet le signal "0" est actif, ce qui veut dire qu'il n'y a aucune entrée active, donc que A est elle-même inactive (faux). On génère NB et BC en copiant deux fois de suite ce schéma.

$$NB = 0 \vee (1 \wedge (C \vee A)) \vee (2 \wedge (C \wedge A))$$

$$NC = 0 \vee (1 \wedge (A \vee B)) \vee (2 \wedge (A \wedge B))$$

Il faut donc chercher les valeurs **0**, **1** et **2** en fonction de A, B et C en n'utilisant que deux négations.

$$3 \vee 2 \vee 1 = A \vee B \vee C$$

$$3 = A \wedge B \wedge C \text{ (I)}$$

$$3 \vee 2 = (A \wedge B) \vee (B \wedge C) \vee (C \wedge A)$$

$$1 \vee 0 = \neg(3 \vee 2)$$

$$1 = (3 \vee 2 \vee 1) \wedge (1 \vee 0) = (3 \vee 2 \vee 1) \wedge \neg(3 \vee 2)$$

On a immédiatement (de I) :

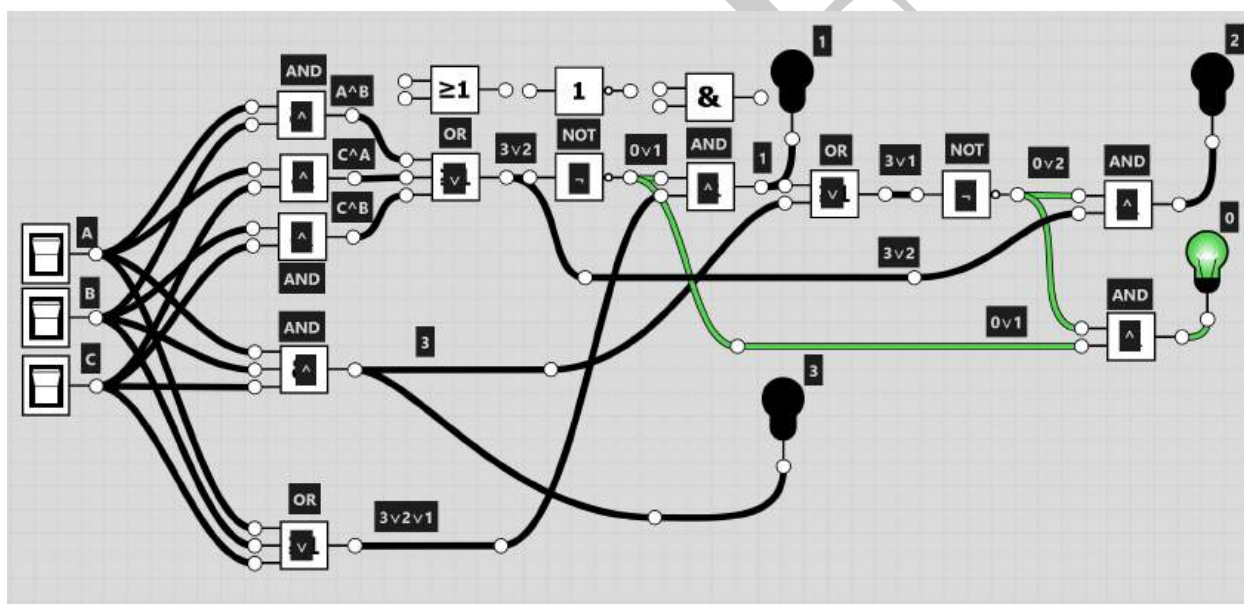
$$3 \vee 1$$

$$2 \vee 0 = \neg(3 \vee 1)$$

$$2 = (2 \vee 0) \wedge (3 \vee 2) = \neg(3 \vee 1) \wedge (3 \vee 2)$$

$$0 = (2 \vee 0) \wedge (1 \vee 0) = \neg(3 \vee 1) \wedge \neg(3 \vee 2)$$

Voici l'équivalent sous forme de graphe. A gauche on voit les trois entrées dont on peut modifier les valeurs au moyen de trois interrupteurs. Au milieu on a ajouté les symboles que les électroniciens utilisent dans leurs schémas. En électronique et en informatique on rencontre le plus souvent les fonctions avec les noms suivants : AND OR, NOT etc.



Ce dessin à été réalisé au moyen de l'outil **Logic.ly** (<https://logic.ly/demo/>) accessible gratuitement en ligne. Une fois réalisé on peut simuler son comportement et observer l'influence des entrées sur les valeurs internes et les valeurs de sorties.

On a obtenu tous les termes nécessaires pour réaliser les trois négations NA , NB et NC . dont voici la première,

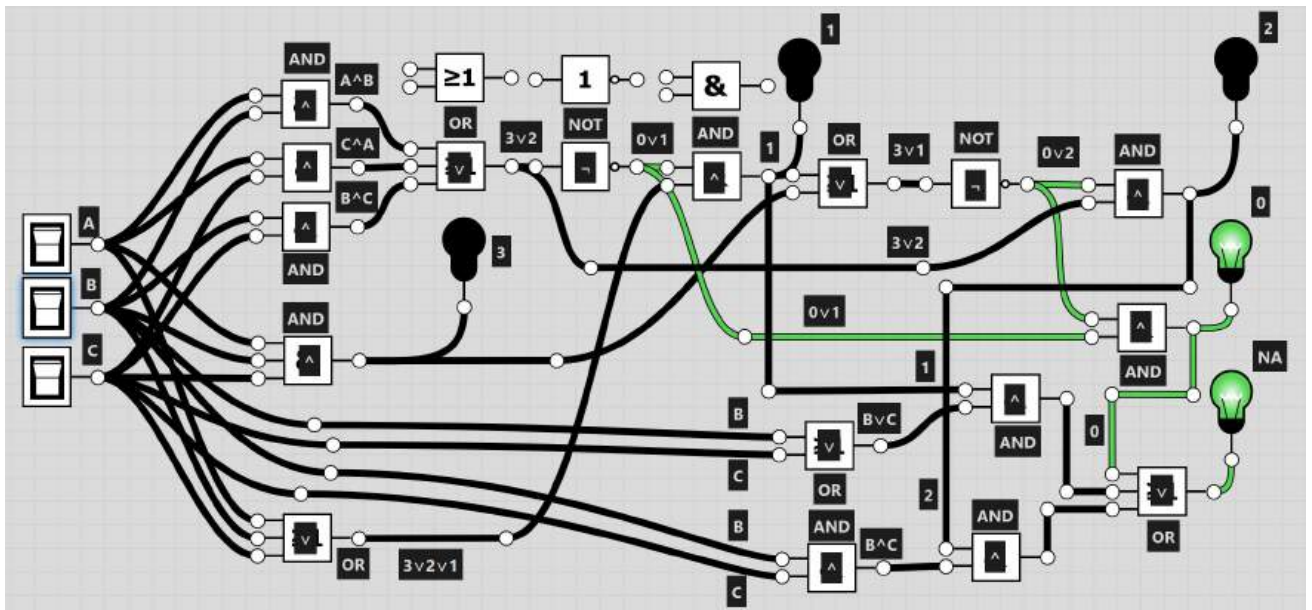
$$NA = 0 \vee [1 \wedge (B \vee C)] \vee [2 \wedge (B \wedge C)]$$

Il vaut mieux laisser l'expression précédente sous sa forme car elle est comme 'factorisée'. Si on commence à substituer **0**, **1** et **2** par leurs équivalents, ça se complique rapidement,

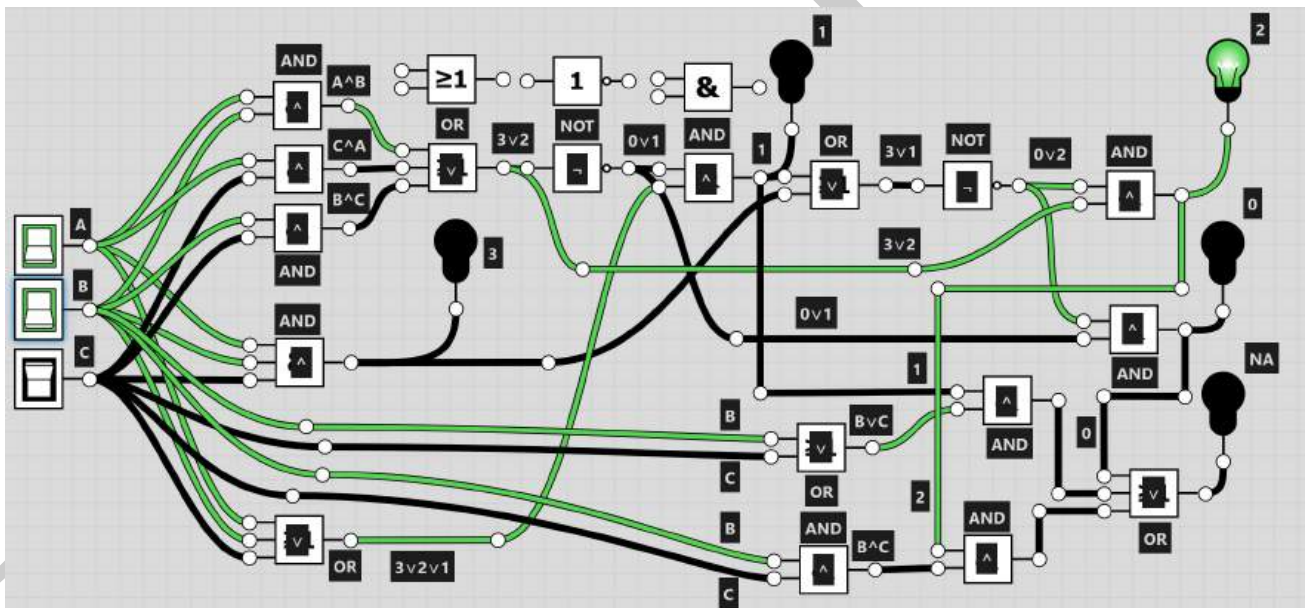
$$NA = [\neg(3 \vee 1) \wedge \neg(3 \vee 2)] \vee [(3 \vee 2 \vee 1) \wedge \neg(3 \vee 2)] \wedge (B \vee C) \vee [\neg(3 \vee 1) \wedge (3 \vee 2)] \wedge (B \wedge C)$$

4.4.1 Simulations et vérifications

Toutes les entrées inactives (fausses), donc NA vraie !



Entrées A et B actives (vraies), donc NA fausse !



4.4.2 Récapitulation et mise en forme finale

Voici la table de vérité que l'on aurait du établir avant. C'est un bon réflexe de commencer par établir les tables de vérité le plus vite possible. Ci-dessous, on voit sous quelles conditions NA doit être vraie. De plus on a reporté le nombre (Nbr) de $Nx = \text{vrai}$ dans chaque ligne.

C	B	A	Nbr	NA
True	True	True	3	False
True	True	False	2	True
True	False	True	2	False
True	False	False	1	True
False	True	True	2	False
False	True	False	1	True
False	False	True	1	False
False	False	False	0	True

Peut-être que cela donne un autre éclairage sur le développement précédant qui a permis de résoudre le problème.

Donc on a trouvé NA et comme on l'avait vu au début de l'exercice, on peut obtenir les deux autres équations NB et NC par 'symétrie'. On va les écrire sous différentes formes en substituant les valeurs connues.

On vérifie qu'il n'y a **que deux négations différentes**. Bien entendu elles sont réutilisées plusieurs fois.

$$NA = [0] \vee [1 \wedge (B \vee C)] \vee [2 \wedge (B \wedge C)]$$

$$NA = [\neg(3 \vee 1) \wedge \neg(3 \vee 2)] \vee [(3 \vee 2 \vee 1) \wedge \neg(3 \vee 2)] \wedge (B \vee C) \vee ([\neg(3 \vee 1) \wedge (3 \vee 2)] \wedge (B \wedge C))$$

$$NB = [0] \vee [1 \wedge (C \vee A)] \vee [2 \wedge (C \wedge A)]$$

$$NB = [\neg(3 \vee 1) \wedge \neg(3 \vee 2)] \vee [(3 \vee 2 \vee 1) \wedge \neg(3 \vee 2)] \wedge (C \vee A) \vee ([\neg(3 \vee 1) \wedge (3 \vee 2)] \wedge (C \wedge A))$$

$$NC = [0] \vee [1 \wedge (A \vee B)] \vee [2 \wedge (A \wedge B)]$$

$$NC = [\neg(3 \vee 1) \wedge \neg(3 \vee 2)] \vee [(3 \vee 2 \vee 1) \wedge \neg(3 \vee 2)] \wedge (A \vee B) \vee ([\neg(3 \vee 1) \wedge (3 \vee 2)] \wedge (A \wedge B))$$

On pourrait faire la substitution finale dans les équations NA , NB et NC de 1, 2 et 3, fonction de A , B et C .

4.5 Expressions algébriques : Nombres, lettres, opérateurs et symboles

Majuscules, minuscules, alphabet latin ou grec, on est libre d'écrire ce que l'on veut, néanmoins il y a des conventions. On va introduire ci-dessous les "us et coutumes" des notations mathématiques.

4.5.1 Lettres alphabet latin

On utilise indifféremment les lettres minuscules et les majuscules de l'alphabet latin ($aX+b$), mais de préférence **x, y, z etc.** pour représenter les valeurs que l'on ne connaît au début du calcul, les inconnues (ou les variables), et **a, b, c α, π etc.** pour les paramètres et valeurs à introduire lors du calcul (évaluation) d'une formule. On reverra les nuances entre ces termes un peu plus loin.

4.5.2 Lettres alphabet grec

Les lettres grecques sont aussi utilisées pour les inconnues ou les paramètres, mais on les réserve souvent pour les constantes physiques ou mathématique, la plus connue étant la constante π . Elle est tellement connue que personne n'aurait jamais l'idée d'utiliser cette lettre en tant qu'inconnue ou que paramètre dans une expression algébrique. Les lettres μ ou σ sont toujours utilisée comme paramètre pour la moyenne et l'écart type en statistique. Par contre la lettre Lambda est utilisée indifféremment pour en tant que paramètre dans (équation paramétrique de la droite) λ , ou en tant que constante dans les équations de la relativité générale d'Einstein, Λ la constante cosmologique qui est juste fondamentale dans la description de l'univers (à noter que l'on choisit en générale la majuscule pour cette dernière).

Les mêmes règles de calcul s'appliquent à tous les symboles, que ce soit des chiffres ou des lettres. $5 \cdot 3 \cdot 3 = 5 \cdot 3^2 = 5 \cdot 9 = 45$ ou $5 \cdot A \cdot A = 5 \cdot A^2$. On voit qu'on a la même notation, mais on ne peut pas calculer la valeur finale car on ne connaît pas A. Par contre lorsque le calcul est terminé on peut trouver la valeur de A (on a trouvé l'inconnue) ou alors une valeur qui dépend encore de A (C'est à dire qu'on a une formule qui dépend de A). kl ka elle, nom optimal, préfixe suffixe dimensions etc.

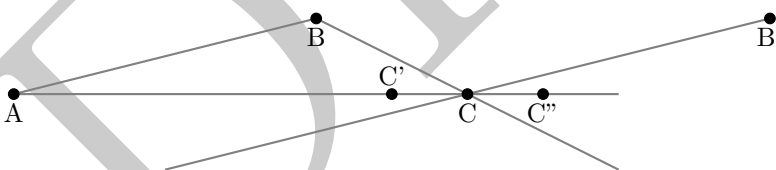
4.6 Egalités, inégalités et identités en géométrie (petits rappels géom. euclid.)

Deux triangles ayant exactement les mêmes côtés et les mêmes angles sont dit "égaux" ou "identiques". Ceux qui sont uniquement les angles en commun sont appelés triangles "semblables". Ces notions s'appliquent donc aussi aux angles, segments et polygones.

4.6.1 Le prof qui abuse : Que vaut la somme des angles d'un triangle ?

Il y a des profs sadiques qui piègent leurs élèves avec cette question (On rappelle qu'un angle droit vaut 90°). On aurait envie de répondre "180" alors que la vraie réponse c'est "trois", il y a trois angles ! Cent huitante, c'est la somme de la mesure des angles, en degrés (on pourrait demander en radians et ça donnerait π radians !

4.6.2 Preuve 180° angles triangle



Sur la figure ci-dessus, on a prolongé les trois côtés pour mettre en évidence que si on tourne autour de C en partant de C' et en allant jusqu'à C'' on parcourt bel et bien 180° (la droite horizontale) et les trois angles du triangle ABC ⁹ (angles semblables à cause des lignes parallèles).

4.6.3 Loi des trois inégalités des triangles

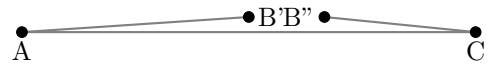
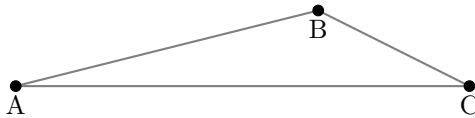
Pour vérifier si trois segments constituent un vrai triangle ABC (c'est à dire qu'on peut le dessiner sur une surface plane), les trois inégalités suivantes doivent être satisfaites.

$$AB + BC > CA$$

$$BC + CA > AB$$

⁹angle ACB + angle BCB' = ABC + angle B'CC'' = BAC = 2 angles droits = 180°

$$CA + AB > BC$$



Si une des trois inégalités précédentes n'est pas respectée on ne peut pas "fermer" le triangle ! En effet si la première inégalité n'est pas respectée dans le triangle de gauche ($AC=5$, $AB=2.5$ et $BC=1.5$), ce dernier ne pourrait pas être à l'échelle sur le dessin de gauche. Il faut regarder alors le dessin de droite ou on a une tentative de fermeture du triangle ($AC=5$, $AB' + B''C = 4$), et ou cette configuration ne permet pas d'avoir un point B réel.

4.7 Egalités vecteurs et matrices (tableaux de nombres)

4.8 Equations et égalités

Définition pragmatique d'une équation : une équation est une égalité entre deux expressions algébriques (un membre de gauche et un membre de droite) qui contient au moins une inconnue (lettre). L'égalité suivante n'est pas une équation telles qu'on les rencontre lors de résolutions de problèmes :

$$1 + 7 = -2 \cdot (-4)$$

De manière générale l'équation est une transcription sous forme mathématique d'un problème concret pour lequel on cherche une ou plusieurs solutions. Trouver la ou les valeurs de l'inconnue devient donc à trouver la ou les solutions du problème. Voici quelques équations sous différentes formes :

$$2x + \frac{7}{4} = -2 + \frac{x}{2}$$

$$x \cdot (x - 1) - 1 = 0$$

4.8.1 Equations, domaine de définition et nombres de solutions

Le nombre de solutions dépend de la forme de l'équation ainsi que du domaine de définition (nombres que l'on s'autorise à utiliser).

4.8.2 Equations Diophantiennes

Les équations diophantiennes sont des équations dont les solutions sont des entiers (éventuellement rationnel, on pourrait aussi imaginer avoir des coefficients complexes et des solutions simples)! Si on accepte les rationnels la résolution est encore plus compliquée (indécidable, incalculable). Comment faire pour savoir si une solution est un nombre irrationnel comme la racine de 2 ou si elle est le rapport de deux nombres premiers très grands ? Voir "équations Diophantiennes rationnelles, avec solutions rationnelles, généralisées ou équations algébrique (+ nombres réels, voir complexe)" et voir "Théorème de Bézout pour les polygones". Ainsi, si l'on travaille avec les nombres naturels N (les entiers positifs), l'équation suivante ne possède pas de solutions q pour n'importe quelle valeur de m et de n . Il y a une inconnue et une restriction sur le domaine de définition.

$$q^2 = m^2 + n^2$$

En effet pour $m=1$ et $n=1$, on trouve facilement q :

$$q^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \implies q = \sqrt{2}$$

Il n'y a pas de solution car la racine carrée de 2 n'est pas un nombre naturel.

Par contre, si $m=3$ et $n=4$, on trouve :

$$q^2 = 3^2 + 4^2 = 25 \implies q = +\sqrt{25} = 5$$

Il est vrai que $(-5)^2$ serait aussi une solution, mais à nouveau, la définition ne contient pas les nombres négatifs, on ne garde donc que $+5$.

Cherchons les solutions (m et n) de l'équation suivante en utilisant le domaine de définition des nombres relatifs Z (nombres positifs et négatifs) :

$$m^2 + n^2 = 25$$

Attention, il y a deux inconnues et une contrainte sur le domaine de définition. Tenir compte de toutes les solutions et combinaison pour $(m,n) \pm(0,5) \pm(3,4)$

Sans contrainte sur les domaines de définition, ces formes d'équation admettent toujours une solution.

Il y a quatre possibilités, l'équation possède :

- aucune solution : $x = \sqrt{-1}$
-

L'équation possède une seule solution (première équation), l'équation possède deux ou plusieurs solutions (la seconde équation a 2 solutions), il y a une infinité de solutions (le sinus est une fonction périodique), il n'y a pas de solution.

4.9 Egalités/identités des nombres dans des bases différentes, représentation nombre, nombres périodiques

Certains nombres ne peuvent pas être écrit avec un nombre fini de symboles lorsqu'ils sont sous forme décimale. Il s'agit de certains nombres rationnels. Même si il y a une infinité de décimales, elles se répètent toujours au bout d'un moment.

Discussion à propos de $1/3 = 0.3333\dots$ soit $3 * 1/3 = 1 = 0.999999\dots$ ou alors $123/999 = 0.123123123\dots$ ($123/1000 = 0.123$).

MONTRER COMMENT TROUVER 0.0133333333 ($0.3333/100 + 0.01$ etc.)

Preuve que $0.9999 = 1$

$$1/3 = 0.33333$$

$$3 * 1/3 = 0.99999$$

$$1 = 0.99999$$

Il en va de même pour tout nombre de la forme $XXX.(XXX-1)99999999$. Cela n'a rien de magique, c'est une autre façon d'écrire le même nombre !

$$1.499999999 = 1.5$$

4.9.1 Utiliser une inconnue X, pour trouver la réponse

$$x = 0.999999999\dots$$

$$10x = 9.999999999\dots$$

$$10x - x = 9.999999999\dots - 0.999999999\dots = 9.000000000000\dots$$

$$9x = 9.000000000\dots$$

$$x = 1.000000000\dots = 1$$

4.10 Identités, congruence, équivalence, proportionalité

Identité \equiv : arrangement différent des termes de l'expression ayant une valeur toujours égale (vraie). Ou alors une **identité est une égalité toujours vraie ??????**

Symboles : \cong ou \equiv congruence, congrus (voir pdf arith. mod.) $3 \equiv 10$ modulo 7, reste division entière par 7. ¹⁰, \equiv équivalence, \simeq similitude, $a \mid b$ soit a divisible par b, \propto prop. etc.

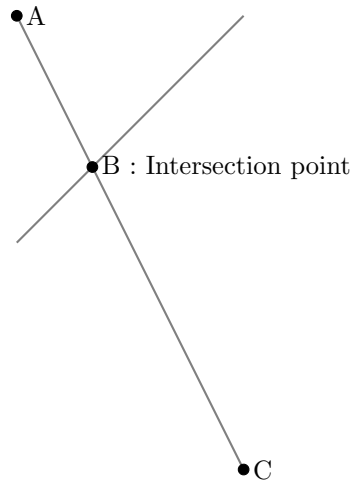
$$(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$$

$$y = k \cdot x$$

$$y \propto x$$

¹⁰Si a et b admettent le même reste p lorsqu'ils sont divisés par p, on dit qu'ils sont congrus modulo p, $a \equiv b$ modulo p, $3 \equiv 10 \equiv 17 \equiv 24$ modulo 7. En Python : $10 \% 7 \Rightarrow 3$ et $10 // 7 \Rightarrow 1$, donc $10 = 1 \cdot 7 + 3$. Note : $10 / 7 \Rightarrow 1.4285714285714286$.

4.11 Exemples notation dans expressions, formules et graphiques



4.12 Ordre opérations : PEMDAS

Lorsqu'on évalue une expression il faut faire très attention à respecter les priorités des opérateurs, surtout si il n'y a pas de parenthèses. Note : Attention à ne pas confondre les barres de fractions horizontales et verticales avec l'opérateur division \div (que l'on utilise presque jamais en calcul). Essayer de calculer l'expression suivante avant de regarder la réponse au paragraphe suivant.

$$16 - 4 \div 1/4 + 1 = ?$$

Note : Pour la multiplication il ne faut pas utiliser les symboles \times ou $*$. Si c'est nécessaire on utilise le symbole \cdot (Exemple : $4 \cdot 4 \cdot y$, que l'on écrira plutôt $4 \cdot 3y$ car c'est plus simple).

Voici les priorités à respecter lorsqu'on évalue une expression : Parenthèse, exponentielle (puissance), multiplication, division, addition, soustraction. Dans l'expression suivante il n'y a ni parenthèses ni de puissances, ni multiplications, c'est donc l'opération de division qui est prioritaire, suivi de la soustraction et de l'addition.

$$16 - (4 \div 1/4) + 1 = ?$$

$$16 - \frac{4}{\frac{1}{4}} + 1 =$$

$$16 - 4 \frac{4}{1} + 1 =$$

$$(16 - 16) + 1 = 1$$

Diverses conventions régissent l'opérateur de soustraction unaire. En mathématiques écrites ou imprimées, l'expression -3^2 est interprétée comme $0 - (3^2) = -9$. $-a^3$ vaut toujours $-(a^3)$ ou a peut être positif ou négatif ! Donc $3 - -a^2 = 3 + a^2$ et par contre :

$$1 - -2 = 1 - (-2) = 1$$

4.12.1 Ambiguïté (Voir article Wiki)

Même avec PEMDAS on peut hésiter : $1 - 2 + 3 = (1 - 2) + 3 = 2$ ou alors $1 - (2 + 3) = -4$?

Les machines à calculer ne donnent pas toutes les mêmes réponses et ça dépend même des pays (USA, France, UK etc.). Ca peut être utile de penser en terme d'addition de l'opposée, soit : $1 + (-2) + 3 = (1 + (-2)) + 3 = 1 + ((-2) + 3) = 2$! Idem pour la division qui est la multiplication de l'inverse. On déconseille d'écrire $1 / 2 / 3$ ou $1 \div 2 \div 3$!

4.13 Equations et unité

Ca n'a l'air de rien, mais il faut le rappeler souvent, une équation étant une égalité comme les deux plateaux d'une balance bien équilibrés, pour transformer et faire des calculs, on additionne/soustrait de chaque côté de

la balance en même temps, mais il faut vérifier que ce soient des objets de même nature sinon plus rien ne joue¹¹

Donc on a une formule que l'on a transformée en fonction d'une variable avec des paramètres et des constantes. En français on dira que le poids de l'eau contenu dans une piscine cylindrique est fonction de la hauteur, variable indépendante X multiplié par la surface (donnée par le carré du paramètre d multiplié par le nombre π) et par la constante de la densité volumique de l'eau $\frac{kg}{m^3}$).

DRABEF

¹¹On additionne des pommes avec des pommes, des mètres avec des mètres, des kWh avec des kWh, attention aux unités qui sont souvent source d'erreur dans les calculs

5 Premiers calculs et égalités, expressions, propositions, formules, équations et fonctions

5.1 Premiers calculs et égalités

On rencontre pour la première fois le signe **égal** lorsqu'on apprend à faire les opérations élémentaires comme l'addition, $3+2=?$ et, même si ce signe invite à effectuer le calcul $3+2$ pour trouver 5, il apporte déjà la notion de **membres aux valeurs identiques**, à gauche et à droite du symbole.



On le voit immédiatement lorsqu'on écrit le calcul complet $3+2=5$. Bien sûr à ce stade on ne parle pas encore d'équation pour ne pas semer la confusion (ajouter à gauche comme à droite). Pour l'instant on dit simplement qu'un des membres contient la réponse et l'autre les opérations, les nombres et tout autre symbole.

5.2 Expressions algébriques

Dans le calcul précédent il y avait deux membres simples (gauche et droit) séparés par un signe égal. Ces membres, aussi appelés **expressions algébriques**, peuvent être beaucoup plus riches et contenir des combinaisons de symboles, termes, nombres, lettres d'alphabet latin (inconnues, variables, paramètres), lettres alphabet grec (paramètres, constantes),

$$\frac{X}{2\pi} + 2\sigma + 3bY^2 + (\alpha_0 + k) - 0.\overline{142857}t^{12}$$

appartenant à des ensembles \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{D} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} (Nombres naturels, relatifs etc.). Elle peuvent aussi rassembler des caractères spéciaux, flèches pour vecteurs, racine carrée, opérations arithmétiques, opérateurs et connecteurs logiques, des mots (noms de fonctions comme 'sinus2), signes de ponctuation, parenthèses, vecteurs, matrices etc.

Les lettres, comme nous le savons, sont utiles pour représenter des valeurs inconnues ou que l'on a pas encore choisie. Majuscules, minuscules, alphabet latin ou grec, on est libre d'écrire ce que l'on veut, mais il y a quand même des conventions. On va introduire ci-dessous les **"us et coutumes"** des notations mathématiques.

5.2.1 Lettres alphabet latin

On utilise indifféremment les lettres minuscules et les majuscules de l'alphabet latin ($aX+b$), mais de préférence **x, y, z etc.** pour représenter les valeurs que l'on ne connaît au début du calcul, les inconnues (ou les variables), et **a, b, c, α , π etc.** pour les paramètres et valeurs à introduire lors du calcul (évaluation) d'une formule. On reverra les nuances entre ces termes un peu plus loin.

5.2.2 Lettres alphabet grec

Les lettres grecques sont aussi utilisées pour les inconnues ou les paramètres, mais on les réserve souvent pour les constantes physiques ou mathématique, la plus connue étant la constante π . Elle est tellement connue que personne n'aurait jamais l'idée d'utiliser cette lettre en tant qu'inconnue ou que paramètre dans une expression algébrique. Les lettres μ ou σ sont toujours utilisée comme paramètre pour la moyenne et l'écart type en statistique. Par contre la lettre Lambda est utilisée indifféremment pour en tant que paramètre dans (équation paramétrique de la droite) λ , ou en tant que constante dans les équations de la relativité générale d'Einstein, Λ la constante cosmologique qui est juste fondamentale dans la description de l'univers (à noter que l'on choisit en générale la majuscule pour cette dernière).

¹²Période '142857' se répétant à l'infini : 0.142857142857...

5.2.3 Types de symboles pour opérations de base

Les symboles usuels pour les opérations de base sont $+$, $-$, $3 \cdot 2$, $\frac{3}{2}$,

mais on trouve aussi des variantes $3 * 2$, 3×2 , $3 \div 2$ ou $3/2$,

et on peut les omettre s'il n'y a pas d'ambiguïté $\frac{3}{2}A$ ou $\frac{3A}{2}$ au lieu de $\frac{3}{2} \times A$,

la répétition de la multiplication (puissance) pouvant également se simplifier $A \cdot A \cdot A = A^3$.

On peut déjà retenir la définition suivante de l'opération 'puissance' : $B^3 = 1 \cdot B \cdot B \cdot B$ qui revient à dire que B à la puissance 3 est égal à multiplier 1 par B, 3 fois. Cela nous permet de comprendre intuitivement l'égalité suivante $B^0 = 1$ qui est très importante. **Ne pas multiplier 1 par B (0 fois) donne 1 !**

5.2.4 Règles, propriétés et généralisation

On cherche à généraliser les règles et les propriétés à tous les types de nombres. Souvent on trouve qu'une propriété est vraie pour un ensemble de nombres donnés et on vérifie que cela fonctionne encore pour un ensemble plus grand. Par exemple on sait que la distributivité fonctionne pour les naturels, mais également pour les nombres négatifs, on dit qu'elle est généralisable à l'ensemble des entiers relatifs :

$$3 \cdot (2 + 5) = 3(2 + 5) = 3 \cdot 2 + 3 \cdot 5$$

$$-4(2 - 3) = (-4)(2) + (-4)(-3)$$

Et bien entendu les lettres pouvant remplacer ces nombres, les règles doivent aussi fonctionner :

$$A \cdot (B + C) = A(B + C)$$

$$AB + AC$$

On voit que même si la notation est identique pour les nombres et pour les lettres, on ne peut pas calculer la valeur finale car on ne connaît pas encore A.

$$5 \cdot 3 \cdot 3 = 5 \cdot 3^2 = 5 \cdot 9 = 45$$

$$5 \cdot A \cdot A = 5A^2$$

L'issue d'un calcul avec une lettre peut prendre deux formes différentes. Soit on a trouvé la forme explicite de A (on a explicité la valeur de l'inconnue),

$$A = 2 + \sqrt{3}$$

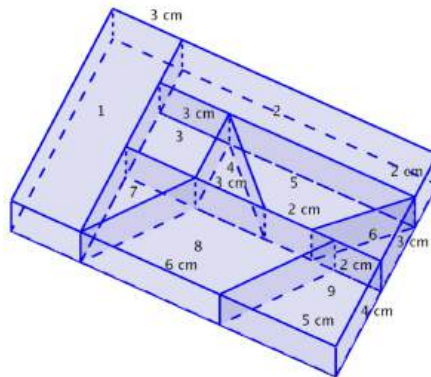
soit on a une valeur qui contient encore A, c'est à dire qu'on a une formule qui dépend de A,

$$S = 2 + A^2$$

5.3 Les formules avec leurs paramètres

Si les définitions de fonctions, d'applications et d'équations sont un peu lointaines, on se souvient certainement mieux de la notion de **formule**. Comme dans le cas de l'addition vue en guise d'introduction, la réponse se trouve à gauche du symbole **égal**, les opérations, nombres et paramètres à droite. ¹³

Par exemple, en géométrie, le périmètre d'un rectangle est donnée par la formule ¹⁴ $Pe = 2(l + L)$ et la surface du carré par la formule ¹⁵ $Su = c^2$, formules que l'on apprendrait par coeur bien avant de savoir les démontrer.



Ces formules ne nous avaient certainement pas été présentées en même temps car on voit immédiatement que la première est plus simple sur un plan pédagogique. Elle concerne un périmètre et même si elle dépend de deux paramètres son résultat reste en dimension I. Il s'agit de la longueur d'une ligne et qu'il n'est pas possible d'obtenir une dimension plus élevée en utilisant une simple addition.(linéarité?)¹⁶ Par contre, la deuxième formule, qui ne dépend que d'un paramètre est élevée au carré et est plus délicate au niveau pédagogique car elle introduit le concept de dimension II, c'est une surface (les mètres au carré, les centimètres au carré etc. m^2, cm^2).

5.4 Propositions et égalités

Une **égalité mathématique est une proposition** s'écrivant à l'aide du **signe égal '='** et **séparant deux expressions algébriques**. Lorsqu'on ne connaît pas encore un nombre dans une égalité du genre $3 + 2 = 5$, on peut remplacer le nombre en question par un symbole (une lettre), par exemple $5 = X + 2$ (trouver X).

Une proposition contenant une égalité, ou une inégalité, peut être vraie ou fausse : en ce sens, elle a aussi une valeur logique dite valeur de vérité. Si elle est vraie on peut toujours la réduire à la forme $0 = 0$. Si une égalité est fausse on peut toujours la réduire à la forme $0 = 1$. **On a donc le droit d'écrire $1 + 1 = 3$ si on spécifie que cette égalité est fausse.** D'ailleurs l'outil informatique Wolfram (accessible online) accepte ce genre d'assertion, il ne met pas d'erreur d'input, il dit simplement que c'est faux :

Input :

$$1 + 1 = 2 + 4$$

Output :

Faux

On peut également cumuler les égalités : $3 = 2 + 1 = 6/2$. Si nécessaire on doit aussi indiquer sur quel ensemble de nombres ou domaine de définition, cette égalité a un sens (Ce qui revient à dire quels sont les nombres que l'on a le droit d'utiliser, par exemple l'ensemble des nombres réels positifs).

¹³A ce stade on n'a pas besoin d'utiliser la notion de variable.

¹⁴l : largeur, L : longueur

¹⁵c : côté

¹⁶Sans chercher à démontrer tout ça, le fait qu'il n'est pas possible d'obtenir une surface sans faire un produit, "introduisant une non-linéarité", nous paraît intuitif

5.5 Valeurs de vérité des propositions

Une **proposition** est une phrase, une **égalité** ou un énoncé¹⁷ qui peut être vraie ou fausse, sans ambiguïté. Elle a une **valeur de vérité**. La phrase "La Suisse est en Europe" est une proposition vraie. La proposition suivante $2 + 2 = 5$ est une **égalité** fausse.

En mathématique une **égalité** est constituée de deux **expressions algébriques** séparées par le signe égal. Sa valeur de vérité peut être vraie ou fausse.

<https://zestedesavoir.com/tutoriels/2256/de-la-logique-aux-processeurs/la-logique-des-propositions-et-des-predicats/>

- Le principe de **non-contradiction** : une proposition ne peut être vraie et fausse en même temps.
- Le principe du **tiers-exclu** : une proposition est vraie ou alors sa négation est vraie, et inversement.

La phrase "Votre pays est en Europe" n'est pas une proposition, mais un **prédicat** car sa valeur de vérité dépend de son contenu (ici le pays). Il en va de même pour l'**équation** $X + 7 = 10$ qui peut être vraie ou fausse en fonction de la valeur de la lettre X (variable ou inconnue).

En mathématiques les valeurs qui ne sont **pas 'fixes'** comme des nombres $2, \pi$ sont souvent représentée par des **lettres latines** et portent le nom de **variables ou d'inconnues** selon le rôle qu'on leur a attribué. Ainsi on parlera d'inconnue quand on cherche une valeur et de variable lorsqu'on introduit une valeur.

Une **équation est une égalité particulière** qui contient **une ou plusieurs variables ou inconnues** et dont la valeur de vérité peut être vraie ou fausse. Résoudre une équation revient à chercher la ou les conditions, de façon à ce que la valeur de vérité soit vraie.¹⁸

5.5.1 Pour aller plus loin : Extension des ensembles de nombres et des opérations de base

Comme le montre très bien R.Feynman, on peut introduire tous les ensembles de nombres à partir des nombres naturels $0, 1, 2, etc.$ et des opérations $+1$ ajouter l'unité à un nombre (incrémenter), l'addition $+$ et la multiplication \times .

Il commence par chercher les propriétés de base de ces opérations élémentaires puis cherche à répondre à ce genre de questions : $1 + X = 3$, que vaut X ? Il montre par là que X impliquera la soustraction de deux nombres Naturels et donnera à nouveau un nombre Naturel ($3 - 1$).

Puis en choisissant volontairement d'autres nombres, $3 + X = 1$ aboutira à $X = (1 - 3)$, qui rigoureusement parlant est un nombre inconnu. Il ne fait pas partie des Naturels. Il faut alors introduire l'ensemble des nombres Relatifs (\mathbb{Z}).

Ensuite démo passionnante introduit division, puissance, racine, logarithme, nombre réel et complexe.

5.6 Les fonctions

La notion de fonction est très utile lorsqu'on a une relation connue entre deux grandeurs (ci-dessus le côté c et la surface S_u).

La relation peut être donnée sous différentes formes : un graphique, un tableau de valeur, un diagramme sagittal, une boîte "noire" avec une entrée et une sortie, ou une équation !

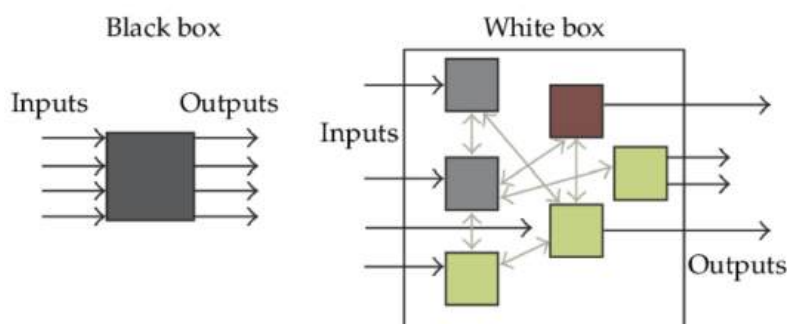
Or, si on regarde la deuxième formule, on voit immédiatement qu'il y a une équation.

Si on a une piscine ronde de rayon r , sa surface vaut $S = \pi r^2$. Si on décide d'utiliser le paramètre $d = 2r$ pour le diamètre on a $S = \pi \frac{d^2}{4}$ formule générale du poids en fonction de la hauteur x : $P = f(x) = \rho \cdot \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot x$

¹⁷Déclaration, statement etc.

¹⁸Trouver la ou les valeurs de l'inconnue ou des inconnues.

Expressions de la fonction	Tableau de valeurs										
$f: A \rightarrow B$ $x \mapsto 0,9x$ ou $f(x) = 0,9x$	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>$f(x)$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0,9</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>1,8</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>2,7</td> </tr> </tbody> </table>	x	$f(x)$	0	0	1	0,9	2	1,8	3	2,7
x	$f(x)$										
0	0										
1	0,9										
2	1,8										
3	2,7										
Diagramme sagittal	Le graphique										



5.7 Formules, courbes, équations et fonctions

Si toute équation a une courbe mathématique qui lui est associée de façon unique, il n'en va pas de même pour la contraposée. En effet, il faut voir qu'une équation $y = 2x$ est une relation parfaite entre x et y et que l'on ne peut que tracer une courbe (droite) approximative car idéalement la courbe est infiniment fine et parfaitement droite ce qui n'est pas possible à réaliser physiquement. Mais on suppose que plus on prend de précaution pour tracer cette courbe plus elle ressemblera à sa version idéale. Par contre si je trace à la main une courbe au hasard, la chance qu'elle soit représentée par une équation existante que l'on peut écrire est si faible que l'on peut dire qu'elle est nulle en réalité.

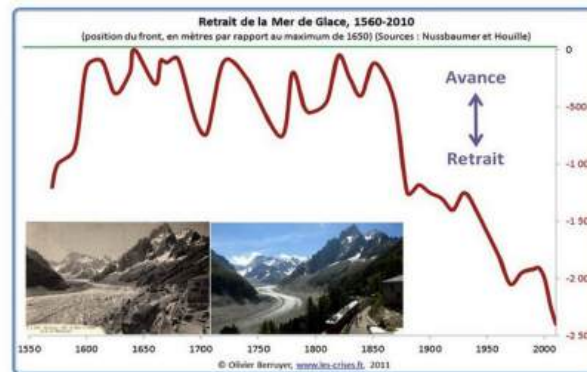
5.8 Fonction suite (glacier)

5.9 La négation : la plus simple des fonctions ?

J'ai cherché une fonction très simple qui peut parler à un large public, la négation ou le connecteur logique négation.

5.10 Fonction suite (compte en banque)

Par exemple, la longueur d'un glacier est fonction du temps. La longueur du glacier est la variable dépendante et le temps la variable indépendante : le temps continue de passer même si la longueur du glacier de change pas. Autrement dit le glacier peut avoir **une longueur identique à des temps différents**. C'est ce que l'on observe sur la figure suivante : plusieurs fois par le passé le glacier a eu un retrait de 500 m.



Pour bien comprendre et retenir les choses rien de mieux que de parler d'argent. Par exemple, l'évolution du **solde** de mon compte en banque est **fonction de la date** car je reçois mon salaire à une certaine date et je fais différents retraits tout au long du mois.

Si l'évolution du solde est fonction de la date, l'inverse n'est pas forcément vrai. En effet, il n'est pas possible de trouver la date exacte à laquelle mon compte est à zéro. Il y a une ambiguïté car cela arrive souvent à la fin de chaque mois, malheureusement. La **date n'est donc pas fonction du solde**. Il en va de même dans le cas du glacier, le temps n'est pas fonction de la longueur.

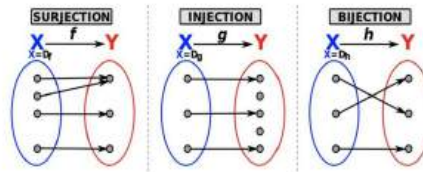
Solde Compte Banque



5.11 Fonction bijective (fonction plus rare)

Fonctions réciproques et bijections

Contrairement aux cas des variables du glacier ou du compte en banque il y a des **variables ou des ensembles** qui sont en relation particulière de façon à ce qu'il existe une fonction $f(x)$ qui relie x à y et une autre fonction $g(y)$ qui relie y à x sans aucune ambiguïté. Les rôles des variables dépendantes et des



21/38

variables indépendantes peuvent donc s'inverser. On parle alors **d'une fonction f et de sa fonction réciproque g** . Pour que ce soit possible, on peut montrer que ces fonctions doivent être **bijectives** comme c'est le cas dans la troisième figure à droite ci-dessus.

Ces fonctions ne peuvent pas prendre deux fois la même valeur. Si l'on reprend l'exemple du glacier, la fonction ne sera une bijection que si il n'y a pas deux fois une longueur identique à des temps différents.

En d'autres termes, s'il existe une bijection h d'un ensemble X dans un ensemble Y , alors il en existe une de Y dans X que l'on appelle h^{-1} , la bijection réciproque de h . On peut alors dire que ces ensembles sont en bijection.

5.12 Pour aller plus loin : Egalité/comparaison, affectation/redéfinition

Note : en informatique on utilise des symboles différents selon le contexte, le signe égal peut porter à confusion. Par exemple mettre la valeur 5 dans la variable A s'écrit :

$A = 5$ ou parfois $A := 5$ et même $A <= 5$ ici ce n'est pas le symbole plus petit ou égal ou une affirmation, c'est une affectation en VHDL, et l'expression :

$A == 5$ est une condition à vérifier avant effectuer ou non une opération par exemple : si $A == 5$ alors "quitter le programme".

Dans certains langages $A = B$ signifie que l'objet A pointe vers la même valeur que l'objet B. Si on change la valeur de B plus tard, A en sera affecté (notion de pointeur en C par exemple).

5.13 Identités remarquables, manipulations et terminologie

5.13.1 Développer, factoriser, réduire, simplifier

Termes :

- Développer (développement) : $x(a+b+2) = ax+bx+2x$
 (Éliminer les parenthèses) $\xrightarrow{\text{dev}}$ $(a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$
 $(a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$
 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
 $(a^n - b^n) = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots)$ $\xrightarrow{\text{fact}}$

- Factoriser (factorisation) $ax+bx+2x = x(a+b+2)$
 (inverse de développer)

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)(a+b)$
 $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)(a-b)$
 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ } Identités Remarquables (voir effectuer plus loin)

- Réduire une expression : regrouper les termes
 (Simplifier) $(x^2 - 3a + x) - 2 + (x^2 + x) = 2x^2 + 2x - 3a - 2$

- Réduire au même dénominateur une fraction
 $\frac{2}{3} + \frac{3}{6} = \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6} = 1$

- Simplifier une fraction & mettre sous forme irréductible
 $\frac{25}{45} = \frac{5 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{5}{3}$

Figure 9: Terminologie

Développer : On passe d'une forme 'produit de somme' à une forme 'somme de produit' ! Factoriser : On passe d'une forme 'somme de produit' à une forme 'produit de somme' !

5.14 Egalités et identités en géométrie, égalité des angles et des segments

Deux triangles ayant exactement les mêmes côtés et les mêmes angles sont dit "égaux". Voir autre termes concernant les égalité des polygones, vecteurs (même norme, sens et direction), matrices et segments : similitude, équipotence. Inégalités : Nous parlerons également des inégalités qui s'écrivent à l'aide des symboles suivants : \leq , \geq etc.

Loi des trois inégalités des triangles pour savoir si c'est un vrai triangle :

5.15 Equations et égalités

Une équation est une égalité entre deux expressions algébriques (deux membres) contenant une ou plusieurs inconnues ou variables (on verra les nuances plus tard). De façon générale une égalité n'est vérifiée que pour certaine(s) valeur(s) de la ou des inconnue(s)/variable(s).

Nous allons revoir les principales opérations élémentaires "directe", dans ces descriptions nous utilisons des égalités. Exemple $2 + 3 = ?$

Ensuite nous reverrons les opérations élémentaires "inverses" et nous utiliserons déjà un peu la notion d'équation et d'inconnue. En parlant de la soustraction on dira $2 + X = 5$, la question sera que vaut X ? C'est une façon de définir la soustraction $X = 5 - 2$.

5.16 Inconnues

Lorsqu'on ne connaît pas encore un nombre dans une égalité du genre $5 = 3 + 2$ on peut remplacer le nombre en question par un symbole (une lettre), par exemple $5 = X + 2$. Cela signifie que dans cette égalité on ne nous a pas donné la valeur de X et que c'est à nous de la trouver.

5.17 Egalités/identités des nombres dans des bases différentes, représentation nombre, nombres périodiques

Certains nombres ne peuvent pas être écrit avec un nombre fini de symboles lorsqu'ils sont sous forme décimale. Il s'agit de certains nombres rationnels. Même si il y a une infinité de décimales, elles se répètent toujours au bout d'un moment.

Discussion à propos de $1/3 = 0.3333...$ soit $3 * 1/3 = 1 = 0.999999...$ ou alors $123/999 = 0.123123123...$ ($123/1000 = 0.123$).

MONTRER COMMENT TROUVER 0.0133333333 ($0.3333/100 + 0.01$ etc.)

Preuve que $0.9999 = 1$

$$1/3 = 0.33333$$

$$3 * 1/3 = 0.99999$$

$$1 = 0.99999$$

Il en va de même pour tout nombre de la forme $XXX.(XXX-1)99999999$

$$1.499999999 = 1.5$$

VIDEO AVEC LES FAUSSES DEMONSTRATIONS EXPLIQUEES à vérifier FAUX ! (Voir "The Return of -1/12 - Numberphile")

5.18 Utiliser une inconnue X, pour trouver la réponse

$$\begin{aligned}x &= 0.9999999999\dots \\10x &= 9.9999999999\dots \\10x - x &= 9.9999999999\dots - 0.9999999999\dots = 9.0000000000\dots \\9x &= 9.0000000000\dots \\x &= 1.0000000000\dots = 1\end{aligned}$$

5.19 Rapports, fractions, et proportions, 4^{ème} proportionnelle

On dit que deux rapports ou fraction sont en proportion si A est à B ce que C est à D ce qui s'écrit sous différentes formes :

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

autre forme (plus ancienne),

$$A : B :: C : D$$

5.19.1 Exemple règle de trois, tableau et produit en croix

La règle de trois est aussi appelée quatrième proportionnelle, c'est une sorte d'équation à une inconnue et elle est extrêmement importante dans la vie de tous les jours. Il s'agit d'une égalité entre deux fractions (rapports, proportions), dont une contient une inconnue X. On a le droit de multiplier l'expression par un nombre quelconque du moment qu'on le fait des deux côtés.

Règle de trois (en trois étapes)

3 m³ béton coûte 1700.-, combien de m³ pour 1000.-

- 1) 3 m³ : 1700.- $\left(X \frac{\text{m}^3}{\text{FRS}} \cdot 1700 \text{ FRS} = 3 \text{ m}^3 \Rightarrow X \right)$
- 2) pour 1.- : $\frac{3 \text{ m}^3}{1700.-} = 1,764 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$
- 3) pour 1000.- : $1,764 \cdot 10^{-3} \cdot 1000 = 1,764 \text{ m}^3$

ou sous la forme d'un tableau : (produits croisés identiques)

m ³	3	X
FR	1700	1000

$$X = \frac{3 \cdot 1000}{1700}$$

ou sous la forme de proportions : Ne pas lire la suite

$$\frac{3}{1700} = \frac{X}{1000} \Rightarrow X = \frac{3 \cdot 1000}{1700}$$

$$\left(1700.- = p \cdot 3 \text{ m}^3 \Rightarrow p = \frac{1700.-}{3 \text{ m}^3} \right)$$

$$X = \frac{1}{p} \cdot 1000.-$$

Comme on le voit à l'avant dernière ligne on a simplement multiplié les deux côtés par mille, ce qui nous permet d'isoler X. On parlera plus en détails des problèmes de proportions plus compliqués (proportion inverse) avec l'introduction de la linéarité et des fonctions affines etc.

$$\frac{3}{1700} = \frac{x}{1000}$$

C'est une des équations les plus simples que l'on puisse imaginer et aussi une des plus utiles au quotidien. Il peut y avoir proportions entre des racines carrées, des inverses etc.

5.20 Les unités et les dimensions: une poule et demie pond un oeuf et demi en un jour et demi

Problème de taux de change (pognon), débit internet etc. Montrer aussi comment on contrôle un calcul avec les unités !

Montrer l'importance des unités, qu'elles subsistent dans les équations, leur propriétés et leur notation (MIEUX EXPLIQUER UNITÉS ET ANALYSE DIMENSIONNELLE).

$$3m + 2m = (3 + 2)m = 5m$$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} [N]$$

Poser les unités permet souvent de mieux cerner le problème, de vérifier les réponses et la cohérence des équations. Cela simplifie souvent le problème et permet d'éviter les erreurs.

Une poule et demie pond un oeuf et demi en un jour et demi. Combien une poule pond-elle d'oeufs en un jour ? Cela n'est pas très clair, reformulons le problème avec toutes les grandeurs et unités mises en jeu.

On s'aperçoit qu'il manque X, le taux de ponte qui s'exprime en oeufs par poule et par jour :

$$1.5[poule] \cdot 1.5[jour] \cdot X \left[\frac{oeufs}{poule \cdot jour} \right] = 1.5[oeufs]$$

On isole X en vérifiant que les unités soient cohérente :

$$X \left[\frac{oeufs}{poule \cdot jour} \right] = \frac{1.5[oeufs]}{1.5[poule] \cdot 1.5[jour]} = \frac{1}{1.5} \left[\frac{oeufs}{poule \cdot jour} \right]$$

Une poule pond donc $\frac{2}{3}$ d'oeuf en 1 jour, ce qui revient à dire 2 oeufs chaque 3 jours par poule.

5.21 Equation simple avec une seule inconnue : preuve que $0.999... = 0.\bar{9} = 1$

Avertissement : Bien que cet exemple fonctionne, attention quand on manipule une infinité de nombres et qu'il y a des notions de limites, des pièges peuvent donner des résultats aberrants. Reprenons la recherche d'une preuve que $0.999... = 1$. On va résoudre le problème sous la forme d'une équation à une inconnue ¹⁹.

$$0.999... = ?$$

Ne pas oublier qu'il y a une infinité de 9 !

$$0.999... = x \quad (I)$$

$$9.999... = 10x$$

$$9 + 0.999... = 10x$$

$$9 + x = 10x$$

$$9x = 9$$

$$x = 1$$

En tenant compte de (I)

$$0.999... = x = 1$$

5.22 Démonstration de $0.999... = 0.\bar{9} = 1$ si en utilisant la notation éclatée en base 10 et une limite

Décomposition d'un nombre :

$$1 = 0.999... = 0.\bar{9} = 9 \cdot 0.1 + 9 \cdot 0.01 + 9 \cdot 0.001...$$

C'est une limite qui vaut au final $(1 - \frac{1}{n})$ pour n tendant vers l'infini (faire la démonstration).

5.23 Attention quand on manipule une infinité de nombres ! Extension des domaines de travail, ensemble des nombres, portée des opérateur etc.

Il faut voir la signification que l'on attribue à une infinité de nombre. (VOIR VIDEO "blackpenredpen sum not equal -1/12")

5.24 Trucs pour mettre un nombre périodique sous forme de fractions

Il faut savoir par coeur ce que font les divisions du genre $1/9$, $1/99$, $1/999$ etc. (d'ailleurs on peut les refaire à la main en 2 minutes), c'est pas compliqué à retenir ! Et il faut aussi se souvenir que :

$$0.99999999... = 0.\bar{9} = 1$$

Après on fait des combinaisons !

$$0.\bar{1} = \frac{0.11111111...}{1} = \frac{0.99999999...}{9} = \frac{0.\bar{9}}{9} = \frac{1}{9}$$

$$0.\overline{001} = \frac{0.\bar{9}}{999} = \frac{1}{999}$$

$$1.\overline{234} = 1 + 0.\overline{001} \cdot 234 = 1 + \frac{0.\bar{9}}{999} \cdot 234 = 1 + \frac{1}{999} \cdot 234 = \frac{999}{999} + \frac{234}{999} = \frac{1233}{999}$$

¹⁹Faire la même chose avec 0.11111111 en bin

5.25 Problème impliquant des pourcentages, mais plus subtil, probabilité d'être négatif alors que le test COVID est positif

5.26 Pour réfléchir un peu au début

Donnée : un test est très fiable et détecte 999 cas de malades sur 1000 malades. Si mon test se révèle être positif quelle est la probabilité que je sois réellement malade ?

Réponse : on ne peut rien dire car on ne connaît pas la prévalence qui est simplement le nombre de malades dans la population. Imaginons que l'on soit sur une île isolée sans aucun contact et qu'il n'y ait aucun malade, la prévalence vaut donc 0. Même si notre test positif à la maladie on a 0 chance d'avoir la maladie. Par contre si tout le monde est malade et que notre test est positif on a 100 pourcent de chance d'être malade. En général dans la réalité on se situe entre ces deux extrêmes, par exemple 15 pourcent de gens infectés.

Autre donnée avec une information supplémentaire : il y a une prévalence de 1%. Si je ne fais pas le test, qu'elle est la probabilité que je sois malade ?

Réponse : 1%, le test est très fiable, mais on ne l'a pas fait, on ne peut rien dire de plus que les statistiques publiées aux informations.

5.27 Deuxième version avec vrais/faux positifs

Pour faire ce calcul on n'a pas besoin de beaucoup plus que la règle de trois. Néanmoins on est vite induit en erreur.

Donnée : Il y a une personne sur 100 qui est malade (Prévalence) et les tests ne sont pas parfaits. On nous a dit que le test est fiable à 90%.

S'il y a 100 malades, il donne 90 tests positifs et 10 faux négatifs (Sensibilité du test limitée, si il n'y a pas assez de virus dans le prélèvement, alors parfois le test ne le voit pas).

S'il y a 100 personnes saines, il y a 90 résultats négatifs et 10 résultats faux positifs (Spécificité du test pas parfaite, le test détecte parfois autre chose que le virus que l'on cherche. On dit qu'il n'est pas assez spécifique pour le COVID, peut-être qu'il a réagit à cause du papillorama, pardon du papillomavirus).

Si on est détecté positif quelle est la probabilité qu'on soit réellement atteint par la maladie ?

On aurait envie de dire 90 pourcent, pourtant :

Nombre de malades sur 10000 personnes (prévalence),

$$Malades = 10000 \cdot 0.01 = 100$$

Nombre de vrais positifs sur les 100 personnes malades (sensibilité pas parfaite),

$$VP = 100 \cdot 0.9 = 90$$

Nombre de faux positifs sur les 9900 personnes saines (spécificité pas parfaite),

$$FP = 9900 \cdot (1 - 0.9) = 9900 \cdot 0.1 = 990$$

Probabilité d'être vraiment positif si le test est positif ??????? 9 ou 10 ??????? (calcul des vrais positifs sans tenir compte de la sensibilité),

$$\frac{VP}{VP + FP} = \frac{90}{90 + 990} \approx 8\%$$

Donc on a 92% de chance de ne pas être malade alors que le test ne fait que 10% de faux positifs, surprenant non ? Tout le monde se trompe, même les médecins parait-il !

Donc si on nous dit que le test a une probabilité de 99 pour cent de détecter un vrai positif et qu'il a une probabilité de 1 pour cent de détecter un faux négatif ce n'est pas suffisant pour savoir quelle est la vraie probabilité que l'on soit malade ou sain. Il faut encore connaître la prévalence, c'est à dire la proportion de la population qui est malade. En effet, si on est sûr à 100 pour 100 qu'il n'y a aucuns malades à Fribourg tout test positif est un faux positif, la probabilité d'être malade est de 0 pour cent alors que le test dit qu'il détecte à 90 pour cent. Ce n'est pas un enfumage par les chiffres et la démonstration que l'on va faire n'est pas si compliquée.

Autre donnée : il y a une prévalence de 1% et un test de sensibilité 90%. Si je suis positif quelle est la probabilité que je sois malade ?

Réponse : 100%, ???????? Le test a marché, on postule qu'il n'y a pas de faux positifs.

Autre donnée : il y a une prévalence de 1% et un test de sensibilité 90%. Si je suis négatif quelle est la probabilité que je sois malade ?

Réponse : On voudrait dire 10/90%, ???????? Le test n'a pas marché, comme une fois sur 10, mais on connaît pas les faux positifs.

On trouve comme la pub du test si on a une prévalence de 50% ???????

Why are false positives a problem? DHSC figures [3] show that 100,664 tests were carried out on 31 May 2020 (Pillar 1 and 2 RT-PCR tests). 1,570 of those tests were positive for SARS-CoV-2 (1.6%). The majority of people tested on that day did not have SARS-CoV-2 (98.4% of tests are negative). When only a small proportion of people being tested have the virus, the operational false positive rate becomes very important. Clearly the false positive rate cannot exceed 1.6% on that day, and is likely to be much lower. If the operational false positive rate was 0.4%, 400 of the 1,570 positive tests would be false positives. That would represent 400 people being isolated when they are well, and much wasted effort in contact tracing. It is possible that a proportion of infections that we currently view as asymptomatic may in fact be due to these false positives. Unless we understand the operational false positive rate of the UK's RT-PCR testing system we risk overestimating the COVID-19 incidence, the demand on track and trace, and the extent of asymptomatic infection.

What causes false positives? • Cross reactions with other genetic material. Other sources of DNA or RNA may have cross reactive genetic material that can be amplified by the RT-PCR test. False positives were observed unexpectedly in norovirus assays in patients with enterocolitis, due to unusually high levels of human DNA in samples [1] • Contamination during sampling. This may happen if the swab head accidentally contacts, or is placed on a contaminated surface (e.g. latex gloves, hospital surface). • Contamination during swab extraction. Viral RNA is extracted from swabs in solution; accidental aerosolization of liquid can cause cross contamination between samples. • Contamination with PCR amplicon. The PCR amplification process generates millions of copies of the DNA target (amplicon) that can cause false positives in subsequent PCR reactions. If a testing lab is accidentally contaminated with amplicon it can lead to sporadic false positives. • Contamination of PCR laboratory consumables. Contamination can spread from a post-PCR lab into a pre-PCR lab by transfer of equipment, chemicals, people or aerosol. Even experienced national labs can be affected. In early-March 2020, COVID-19 RT-PCR assays produced by the CDC were withdrawn after many showed false positives due to contaminated reagents.

Why are false negatives a problem? The false negative rate changes over the course of infection, and this will be further reduced by poor sampling technique and sample degradation. This will lead to an underestimate of incidence. False negatives will also allow an asymptomatic or paucisymptomatic patient to be released from quarantine to infect other people and propagate the epidemic. They represent a missed opportunity for control in the test and trace programme, and would remain as a source of infection in a care home or hospital. The impact of false negatives is greatest when the absolute risk of infection is high (e.g. close contact with a known case) and where identifying and isolating infectious individuals is critical, especially where negative tests will be used as a 'release' mechanism (e.g. returning to work, entering social care from hospital, release from quarantine).

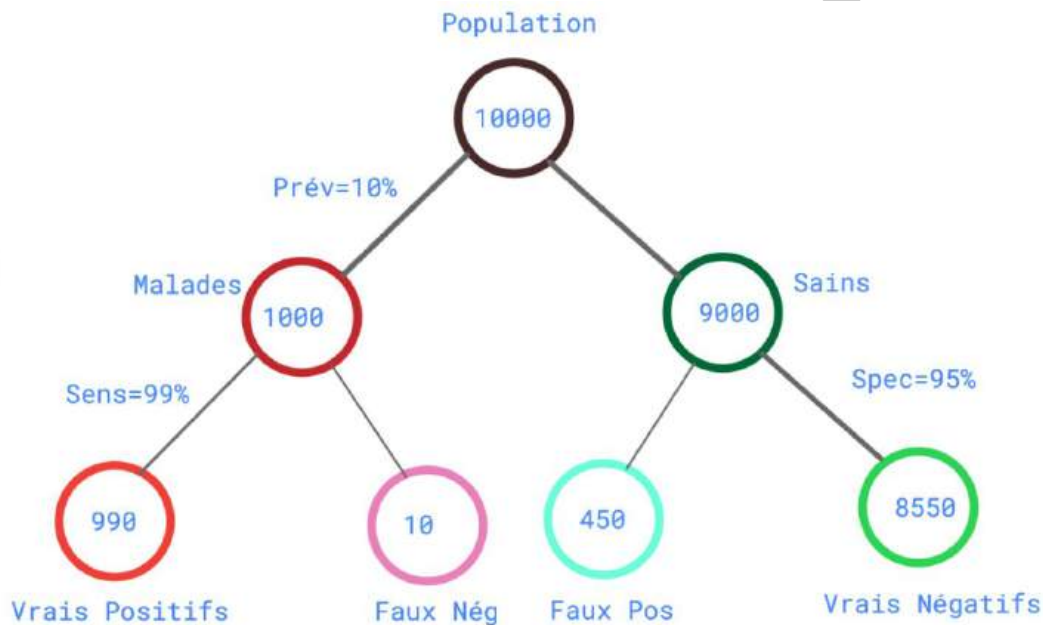
What causes false negatives? • Poor sampling technique. Nasopharyngeal sampling is invasive and can feel unpleasant. It may be less effective when carried out unsupervised, so the false negative rate may increase as sampling at home becomes more common. • Sample degradation. Samples may degrade when stored or while being transported. • Sampling too early. Viral shedding from individuals peaks just before, or at the onset of symptoms [4,5]. If samples are taken early in infection (1-4 days after infection) they have an increased false negative rate. • Sampling too late. Viral shedding declines after symptoms have peaked [6]. Samples taken at this stage of infection will show an increased false negative rate.

5.28 Troisième problème avec détails vrais/faux positifs/négatifs

Dans la réalité on aura plutôt des chiffres qui ressemblent à ce qui suit :

- **Prévalence** dans la population (nombre de malades estimé) : 10 pourcents
- **Sensibilité** du test : 99 pourcents (capacité du test à détecter la maladie, tout étant compris, fiabilité, erreur au labo etc.) Dans le cas présent le test donnera 1 pourcent de faux négatifs.
- **Spécificité** du test : 95 pourcents (Si le test n'est pas assez spécifique il risque d'être positif en détectant autre chose que le virus pour lequel il est conçu, il aura tendance à faire 5 pourcents de faux positifs)

Pour faciliter la résolution de ce genres de problèmes, il ne faut pas hésiter à mettre de vrais nombres, simples, comme 10000 pour la population par exemple. En effet, on voit mieux ce qui se passe en terme de pourcentages et les calculs sont plus faciles à faire.



Pv : Prévalence = 10% , Se : Sensibilité = 99% (1% faux négatifs), Sp : Spécificité = 95% (5% faux positifs),

$$P(\text{Malade}|\text{Positif}) = \frac{VP}{VP + FP}$$

que l'on traduit par : probabilité d'être vraiment malade alors qu'on a reçu un résultat positif. On obtient cette valeur en faisant le rapport entre le **nombre de vrais positifs et le nombre total** de positifs (vrais + faux). On peut trouver cette valeur en se basant sur le graphique ci-dessus (avec une population imaginaire de 10000) ou en utilisant la formule ci-dessous (On note que la valeur exacte de la population n'est pas importante et qu'elle n'apparaît pas dans la formule),

$$P(\text{Malade}|\text{Positif}) = \frac{1}{1 + \frac{(1-Pv)(1-Sp)}{Pv \cdot Se}} \approx 68\%$$

et l'autre situation,

$$P(\text{Sain}|\text{Négatif}) = \frac{VN}{VN + FN}$$

que l'on traduit par : probabilité de ne pas être malade alors qu'on a reçu un résultat négatif,

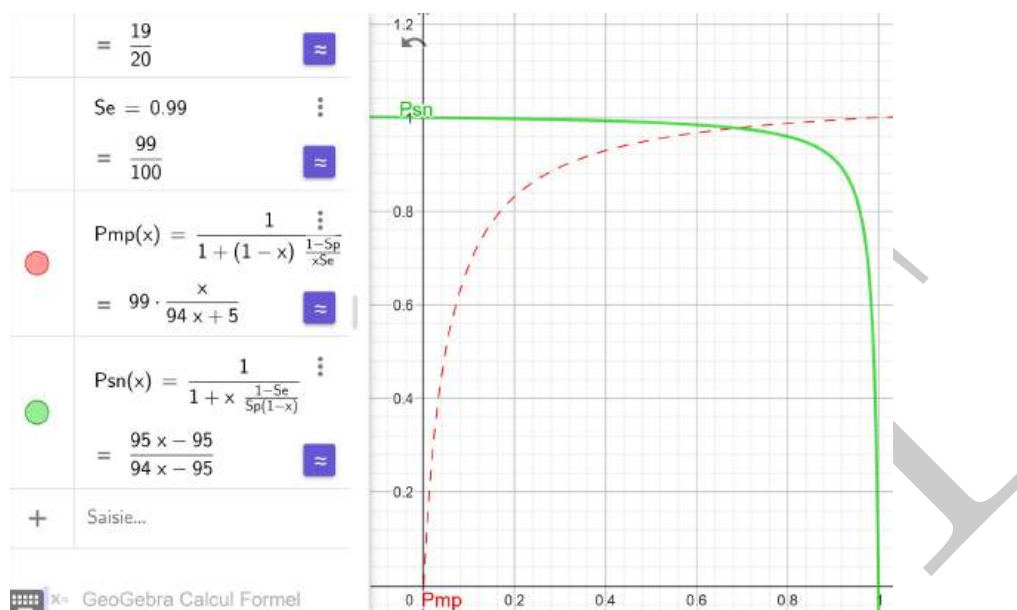
$$P(\text{Sain}|\text{Négatif}) = \frac{1}{1 + \frac{Pv(1-Se)}{(1-Pv)Sp}} \approx 99.8\%$$

Si la prévalence est faible (10%),

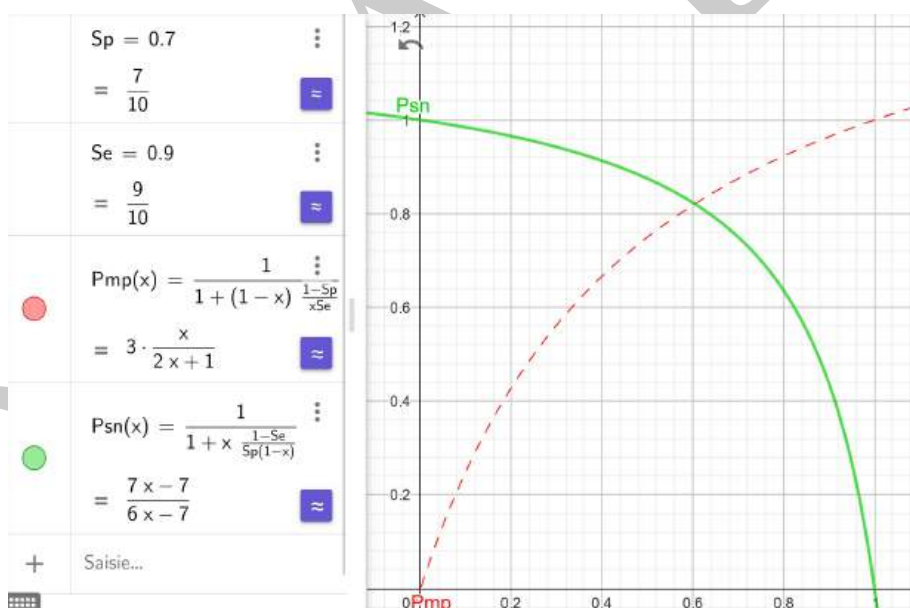
- Si la spécificité est mauvaise le risque de faux positifs augmente beaucoup même si on a une bonne sensibilité.
- Avec une spécificité 10 fois meilleure que la sensibilité, on retrouve un nombre de faux positifs égal au nombre de faux négatifs et donc une fiabilité similaire pour les positifs et les négatifs (> 99%).

5.29 Evolution des probabilités en fonction de la prévalence pour Sp et Se donnés

5.29.1 Sp=95%, Se=99%



5.29.2 Sp=70%, Se=99%



Discuter ces valeurs en se demandant ce qui est le plus important dans différentes situation, presque personne/tout le monde n'est/est malade etc.

5.30 Pour aller plus loin : Théorème de Bayes

Pour comprendre plus en détails le paragraphe précédent il est bien de ce pencher un peu sur le théorème de probabilité de Bayes :

$$P(A/B) = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B)}$$

Ce qu'on a fait avec l'exercice précédent du COVID ressemble au théorème Bayésien : on met à jour la valeur de l'hypothèse de départ (estimation d'être malade en fonction de la simple prévalent), étant donné que l'on connaît une information supplémentaire (le résultat du test).

5.31 Pour aller plus loin : il en va de même dans certaines bases et dans les systèmes de représentation des nombres dans les ordinateurs.

PARLER DES PROBLEMES D'ARRONDIS DANS LES ORDI ET QUE LES NOMBRES REPRESENTABLE DE FAÇON EXACTE DEPENDENT DE L'ENCODAGE.

5.32 Pour aller plus loin

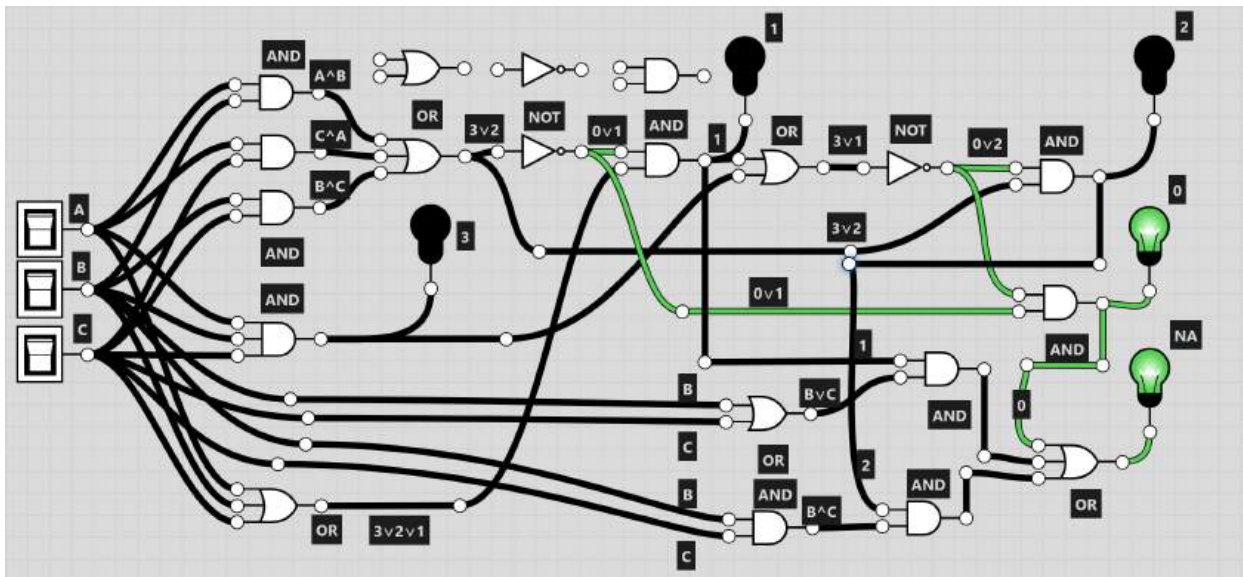
Ce n'est pas toujours évident de voir si une égalité est vraie ou fausse, même si elle ne contient pas d'inconnues, en effet l'égalité suivante ... est une égalité vraie !

5.33 Sur l'égalité et "l'identité/équivalence" des triangle, des segments, vecteurs etc. COPIER contenu doc EM équation implication et équivalence page 7 et explication implication Herb Gross

(à vérifier) [...] à l'explication par le vocabulaire employé par les professeurs des écoles, j'en ajouterai une autre qui provient de la vie courante : dans le langage de tous les jours, lorsqu'on parle d'objets qui sont principalement caractérisés par une grandeur numérique particulière, il est fréquent que l'on assimile l'objet à cette grandeur et que l'on confonde l'égalité de cette grandeur avec l'égalité des objets sans que cela ne nuise à l'intelligibilité d'une conversation qui repose sur beaucoup d'implicites (on parle souvent de salaires égaux lorsqu'ils ont même le montant mais il est évident que deux employés ne touchent pas le même argent ; on parle parfois de trajets égaux pour signifier qu'ils ont même longueur ou même durée alors que tout le monde comprend qu'ils sont différents) (Développer et ajouter contenu doc Em equ page 7 et 8)

5.34 Algèbre de Boole

Dans les ordinateurs et les circuits électroniques numériques etc.



Notation de la logique formelle (conjonctions, disjonction etc.) :

$$NA = 0 \vee (1 \wedge (B \vee C)) \vee (2 \wedge (B \wedge C))$$

et notation Booléenne (AND, OR, +, · etc.) :

$$NA = 0 + (1 \cdot (B + C)) + (2 \cdot (B \cdot C))$$

où 0, 1 et 2 sont aussi fonctions de A, B et C.

Rappel des lois élémentaires...

5.35 Algorithme simple : nombre premiers, tri

Ces algorithmes ne nécessitent pas de connaissances plus avancées que ce que nous avons vu jusqu'à présent. Mais on peut déjà faire des choses infiniment compliquées avec des opérations toutes simples, on va donc introduire la logique de base ici.

5.36 Calculabilité

Donc certains problèmes restent hors de portée car ils impliquent des nombres que l'on connaît, mais qui sont trop grands pour être manipulés ou connus parfaitement. On connaît la définition de Pi et on a des algorithmes pour trouver une approximation qui en principe peut être aussi précise qu'on le souhaite, mais le calcul ne s'arrête jamais. En ce sens on peut se dire que calculer la Nième décimale de Pi est un problème calculable.

5.37 Décidabilité

Si on divise 1 par 3 on se rend compte que le calcul ne se termine jamais. Il serait donc incalculable. Mais on sait parfaitement que la suite se répète à l'infini et qu'il y a donc une période de répétition. On peut donc arrêter le calcul et affirmer que l'on connaît toutes les décimales de ce nombre. Il est calculable.

Certains problèmes sont si complexes que l'on ne sait même pas si ils sont calculables (même si on se fixe une limite comme dans le cas précédent avec la Nième décimale), ils échappent à notre intelligence (voir incomplétude, machine de Turing, arrêt d'un programme etc.).

Voir la vidéo : The Simplest Math Problem No One Can Solve - Collatz Conjecture "Veritasium 18'00" (Problème $3x + 1$), graph directed form 09'13, Benford law 06'30, high and duration 04'30, organic tree or filament, brownien motion. Voir **John Conway** sur la non décidabilité, ou "de l'impossibilité de prédire si un programme va s'arrêter". Busy Beaver, Graham, Tree, $3x+1$ problème, courbe logistique, chaos, stabilité, fractale et proximité de Z^2 , Mandelbrot etc.

5.39 Démonstration et preuve, force brute, calculabilité, décidabilité

On pourrait se dire que l'on peut toujours prouver une assertion ou un théorème mathématique en explorant toutes les solutions par ordinateur. En effet, si on se donne un nombre borné, gérable par un ordinateur, c-à-d calculable dans un temps raisonnable, même si ce nombre est grand, étant donné que le nombre est fini, cela devrait rester un problème trivial, ce qui est le cas si le calcul est faisable dans un temps raisonnable avec les moyens techniques à disposition. Cette méthode s'appelle "**preuve par la force brute**". Par contre, à partir d'une certaine taille, prouver une assertion pour tout nombre de l'ensemble restera impossible par ce genre de méthode et il faudra utiliser une méthode dite intelligente. En effet, si on a 2^{1000} opérations à effectuer, cela reste hors de la portée d'un ordinateur et on ne peut pas "vraiment" dire que le problème est trivial (Penser aux nbr max d'op/s d'un ordi...).

5.40 Exemple module Python pour travailler avec de grands nombres

Si on utilise le module "decimal" on peut travailler avec des nombres de tailles arbitraires en indiquant la taille maximale (avec `getcontext().prec() = 60000` par exemple).

Dans l'exemple ci-dessous on fait le calcul $\frac{1}{31}$ et on cherche dans la chaîne 'ans' à partir de quelle position apparaît la période, voir `ans.find("0322",3)`. On refait la même chose avec $\frac{1}{577}$.

```
[In [59]: from decimal import *

[In [60]: getcontext().prec = 60000

[In [61]: ans=str(Decimal(1)/Decimal(31))

[In [62]: ans[1:60]
Out[62]: '.0322580645161290322580645161290322580645161290322580645161'

[In [63]: ans.find("0322",3)
Out[63]: 17

[In [64]: ans[17:60]
Out[64]: '0322580645161290322580645161290322580645161'

[In [65]: ans=str(Decimal(1)/Decimal(31))

[In [66]: ans=str(Decimal(1)/Decimal(577))

[In [67]: ans[1:60]
Out[67]: '.0017331022530329289428076256499133448873483535528596187175'

[In [68]: ans.find("00173",5)
Out[68]: 578

[In [69]: ans[1:580]
Out[69]: '.0017331022530329289428076256499133448873483535528596187175043327556325
805892547660311958405545927209705372616984402079722703639514731369150779896013864
506065857885615251299826689774696707105719237435008665511265164644714038128249566
109185441941074523396880415944540727902946273830155979202772963604852686308492201
96533795493934142114384748700'

[In [70]: ans[578:580]
Out[70]: '00'

[In [71]: ans[578:600]
Out[71]: '0017331022530329289428'
```

Dans le premier cas la période apparaît après 17 chiffres et dans le deuxième cas après 578 chiffres. Dans ce dernier cas on vérifie la chaîne 'ans' de la position 578 à 600.

6 Opérations élémentaires

6.1 Opérations "directes"

En partant avec l'ensemble des nombres naturel, ce sont les premières opérations que l'on apprend. Il y a une suite de règles à appliquer comme une recette de cuisine, c'est ce qu'on appelle des algorithmes. (exemple : algorithme de la multiplication).

- Addition : $+$ ($3 + 2 = 5$), Définition : additionner 2 au nombre 3 c'est ajouter 2 fois l'unité (1) au nombre 3 ($3 + 1 + 1 = 5$).
- Multiplication : $*$ ($5 * 3 = 15$), Définition : multiplier 5 par 3 c'est additionner trois fois le nombre cinq au nombre zéro. ($0 + 5 + 5 + 5 = 15$).
- Puissance (exposant) : $**$ ($2**3 = 2*2*2 = 8$), Définition : élever 2 à la puissance 3 c'est multiplier l'unité par le nombre deux trois fois de suite. ($1 * 2 * 2 * 2 = 8$). Donc $N**0 = 5**0$ vaut 1 car cela revient à ne pas multiplier 1 par 5 ou par N. ($1 = 1$)

$a * b = 0 + \underbrace{a + a + a + a + a}_{b \times}$
 0 élément absorbant de x
 1 élément neutre de x

$5 * 0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + a = 0$
 $1 * 5 = 0 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$

$a^b = 1 \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}_b$

$2^3 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
 $2^0 = 1 \cdot \cancel{2 \cdot 2 \cdot \dots} = 1$
 $2^1 = 1 \cdot 2 = 2$

$a^b \cdot a^c$
 a^b / a^c
 $a^{1/2}$ a^{-1}

Figure 10: Opérations directes

(Voir démonstration de Feynman dans annexe mathématique physique I) Caract. expo, double, decuple tous les ..., illusions et naïveté de économiste 2 pourcents croissance, desintegration, covid, estimation et approx d'une puissance, que valent les intérêts à e^x après un an ?

6.1.1 Propriétés des puissances et colonnes de puissances

Les opérations précédentes appliquées sur les nombres entiers ont des propriétés intéressantes telles que l'associativité, la commutativité, la distributivité, les propriétés des puissances et la priorité dans les colonnes de puissances si on ne met pas de parenthèses :

$$4^3 = (4^3)^2 = (4^3)(4^3) = 4^{(3+3)} = 4^{(3*2)} = 4^6$$

$$(2^{\frac{1}{2}})^2 = 2^{2 \cdot \frac{1}{2}} = 2^1 = 2$$

$$2^{-\frac{2}{1}} = \frac{1}{2^2}$$

Attention à toujours mettre des parenthèses si on veut enlever toute ambiguïté !

La convention $0^0 = 1$ est utilisée dans un cadre abstrait plus large, par exemple pour identifier le polynôme X^0 avec la fonction constante 1.

Dans ce qui suit "a" est appelée la base de la puissance. Une base très importante (base naturelle) est le nombre "e". C'est un nombre irrationnel qui vaut environ 2.71828 !

Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Puissance_d%27un_nombre pour plus d'infos

Il n'y a pas de formule générale sur les **additions** ou les **soustractions** de puissances, sauf la **factorisation de $a^n - b^n$** et le **développement de $(a + b)^n$** .

En revanche, pour les **multiplications** et les **divisions** de puissances, on sait que pour tous nombres a et b et pour tous entiers naturels m et n :

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$;
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ si $a \neq 0$;
- $(a^m)^n = a^{m \times n} = a^{n \times m} = (a^n)^m$;
- $(a \times b)^n = a^n \times b^n$;
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ si $b \neq 0$.

Ces formules sont encore valables si m ou n sont des entiers strictement négatifs, à condition que a et b soient non nuls.

On remarque que toutes ces formules sont cohérentes entre elles et avec la convention « $a^0 = 1$ pour tout nombre réel $a \neq 0$ ». Par exemple, pour tout entier naturel $n \neq 0$ et pour tout réel $a \neq 0$,

$$a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1.$$

Attention: $(a^n)^m \neq a^{(n^m)}$, sauf pour des cas très particuliers ; de ce fait, l'écriture a^{n^m} est ambiguë et, bien qu'il existe une convention qui favorise la désambiguïssation $a^{n^m} = a^{(n^m)}$, celle-ci devrait être évitée sans parenthésage univoque³.

Important : sous certaines conditions On peut étendre le genre (ensembles) des nombres a , m et n aux rationnels ($5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$), réels ($\sqrt{5^3} = 5\sqrt{5}$) et imaginaires.

6.2 Opérations "inverses"

Pour illustrer les opérations inverses on va utiliser le concept d'inconnue. Lorsqu'on ne connaît pas encore un nombre dans une égalité du genre $5 = 3 + 2$ on peut remplacer le nombre en question par un symbole (une lettre), par exemple $5 = X + 2$. Cela signifie que dans cette égalité on ne nous a pas donné la valeur de X et que c'est à nous de la trouver.

Chacune des opérations "inverses" suivantes peut être définie à partir des opérations "directes" en posant une question.

- Soustraction : $5 = 2 + X$ ou $5 = X + 2$, question : 5 égale 2 plus X, que vaut X (3) ? Cela revient à écrire $X = 5 - 2$
- Division : $6 = 2 * X$ ou $6 = X * 2$, question : 6 égale 2 fois X, que vaut X (3) ? Cela revient à écrire $X = 6 / 2$

On se rend compte que l'opération directe de puissance est un peu spéciale car contrairement à l'addition et à la multiplication l'ordre des nombres a une importance. Il y a donc deux opérations "inverses" possibles et il faut faire attention à choisir la bonne en fonction du nombre que l'on recherche, ou autrement dit en fonction de la position de l'inconnue.

- Racine : $16 = X ** 2$, question : 16 égale X au carré, que vaut X (4)? Cela revient à écrire $X = \text{racine2}(16)$
- Logarithme : $16 = 4 ** X$, question : 16 égale 4 à la puissance X, que vaut X (2) ? Cela revient à écrire $X = \log_4(16)$, soit logarithme en base 4 de 16

Dans ces égalités on s'aperçoit qu'on a le droit d'additionner, de soustraire, de multiplier ou de diviser (sauf par zéro) l'expression par un nombre quelconque, du moment qu'on le fait des deux côtés.

6.2.1 Propriétés logarithmes et exponentielles (puissances)

A nouveau, pour ces opérations il y a une série de propriétés très importantes à savoir par coeur, log d'un produit, changement de base :

$$\ln(x) = \log_e(x)$$

$$x = \log_{10}(10^x)$$

$$B * \log_x(A) = \log_x(A^B)$$

$$\log_x(AB) = \log_x(A) + \log_x(B)$$

$$\log_{10}(x) = \frac{\log_x(x)}{\log_x(10)}$$

$$10^x = e^{\ln(10)x}, a^x = e^{\ln(a)x}$$

La convention $0^0 = 1$ est utilisée dans un cadre abstrait plus large, par exemple pour identifier le polynôme X^0 avec la fonction constante 1. En effet, dans ce qui suit $\ln(0)$ n'est pas défini :

$$(x, y) \Rightarrow x^y = e^{\ln(x)y}$$

6.3 Résumé opérations directes et inverses, extensions ensembles, vocabulaire

Les opérations inverses vont faire apparaître de nouveaux nombres : négatifs, rationnels etc.

Opérations avec 3 nombres 1

1 $(+)$ $a = b + c$ $b = ?$ $b = a - c$
 $c = ?$ $c = a - b \Rightarrow (-)$

fonction implicite : $b =$ quel est le nombre que je dois ajouter à c pour trouver a ?

2 (\cdot) $a = b \cdot c$ $b = ?$ $b = \frac{a}{c}$
 $c = ?$ $c = \frac{a}{b} \Rightarrow (\div)$

"au X élevé à la puissance 2"

x^2 se lit : "X exposant 2" ou "X au carré" ou "X à la puissance 2"
 \sqrt{x} : "racine carrée" $\sqrt[4]{x}$ "racine quatrième"

3 $(^)$ $a = b^c$ $b = ?$ $b = \sqrt[c]{a}$ (√)
 $c = ?$ $c = \log_b(a)$ (log_b)

3.1 $9 = 3^2$ $3 = \sqrt[2]{9}$

3.2 $9 = 3^2$ $2 = \log_3(9)$

propriétés : $b^{-3} = \frac{1}{b^3}$; $\frac{1}{b^{-3}} = b^3$ $10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0,001$

Il y a deux opérations différentes pour revenir en arrière ("fonction inverse") selon que l'on veut savoir b ou c !

La racine carrée $\sqrt{N} = n$ est le nombre positif n qui multiplié par lui-même redonne N

\forall , le log en base b de X est la puissance à laquelle il faut élever b pour retrouver X

$b^0 = 1$ $\log_b b = 1$ $Y = \log_b(X)$ $\log_{10} 100 = \log_{10} 10^2 = 2$

Figure 11: Opérations avec 3 nombres

Parler encore de a/b en tant que a multipliant l'inverse de b . Expliquer en quoi cela pose problème pour les vecteurs, matrices etc.

6.4 Pour aller plus loin : Tétration

On va parler d'opérations ainsi que de nombres et de concepts qui semblent un peu bizarre. La compréhension parfaite de ces concepts n'est pas capital et il ne faut pas s'attarder sur la différence entre un nombre transcendant et un nombre algébrique, sur l'opération Tétration, même si personnellement je suis toujours attiré par des nouveaux mots que je ne connais pas et que j'en tire presque toujours une petite satisfaction.

Si on résume, chaque opération est définie comme une répétition d'une opération élémentaire précédente plus simple. L'addition revient à ajouter n fois l'unité à a . La multiplication de a par n revient simplement à ajouter n fois a à 0. Le nombre a élevé à la puissance n revient à multiplier n fois le nombre 1 par a .

Donc a^0 revient à ne pas multiplier 1 par a , c'est à dire que 1 reste intact, ce qui donne le résultat connu $a^0 = 1$. Cette façon de voir était utilisée par Feinman lors de ces cours d'introduction aux systèmes de nombres et aux opérations élémentaires (**voir plus loin dans le texte**).

The first four hyperoperations are shown here, with tetration being considered the fourth in the series. The unary operation succession, defined as $a' = a + 1$, is considered to be the zeroth operation.

1. Addition

$$a + n = a + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n$$

n copies of 1 added to a combined by succession.

2. Multiplication

$$a \times n = \underbrace{a + a + \dots + a}_n$$

n copies of a combined by addition.

3. Exponentiation

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_n$$

n copies of a combined by multiplication.

4. Tetration

$${}^n a = \underbrace{a^{a^{\dots^a}}}_n$$

n copies of a combined by exponentiation, right-to-left.

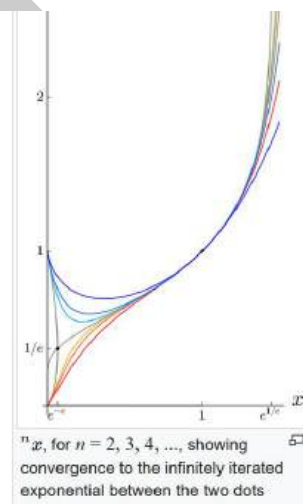
Note that nested exponents are conventionally interpreted from the top down: 3^{5^7} means $3^{(5^7)}$ and not $(3^5)^7$.

Succession, $(a_{n+1} = a_n + 1)$, is the most basic operation; while addition $(a + n)$ is a primary operation, for addition of natural numbers it can be thought of as a chained succession of n successors of a ; multiplication $(a \times n)$ is also a primary operation, though for natural numbers it can analogously be thought of as a chained addition involving n numbers of a . Exponentiation can be thought of as a chained multiplication involving n numbers of a and tetration $({}^n a)$ as a chained power involving n numbers a . Each of the operations above are defined by iterating the previous one;^[1] however, unlike the operations before it, tetration is not an [elementary function](#).

The parameter a is referred to as the **base**, while the parameter n may be referred to as the **height**. In the original definition of tetration, the height parameter must be a natural number; for instance, it would be illogical to say "three raised to itself negative five times" or "four raised to itself one half of a time." However, just as addition, multiplication, and exponentiation can be defined in ways that allow for extensions to real and complex numbers, several attempts have been made to generalize tetration to negative numbers, real numbers, and complex numbers. One such way for doing so is using a recursive definition for tetration; for any positive [real](#) $a > 0$ and non-negative [integer](#) $n \geq 0$, we can define ${}^n a$ recursively as:^[1]

$${}^n a := \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ a^{({}^{n-1} a)} & \text{if } n > 0 \end{cases}$$

Le **tétration** est construit sur le même principe, c'est à dire qu'il s'agit de répéter n fois l'opération de puissance sur une base a . Le nombre n est censé être un nombre naturel.



6.4.1 Calcul Tétration sous forme de puissances et notation décimale

Le Tétration définit par la fonction précédente monte beaucoup plus vite que les colonnes de puissances que l'on peut rencontrer. Comparaison forme colonnes puissances traditionnelles, d'abord avec 3 :

$$a^x = \exp(a, x) \Rightarrow \text{colpui}(3, 3) = C(3) = 3^{3^3} = 3^{3 \cdot 3} = (3^3)^3 = (3^3)(3^3)(3^3) = (27^3) = 19693$$

$${}^a x = \text{tetra}(a, x) \Rightarrow \text{tetra}(3, 3) = T(3) = 3^{(3^3)} = 3^{27} = 7.625597484 \times 10^{12}$$

Puis avec 4 :

$$a^x \Rightarrow C(4) = 4^{4^4} = (256)^{(4^4)} = (256^4)^4 = 256^{16} = (256)(256)\dots(256)(256) = 3.4 \times 10^{38}$$

$${}^a x \Rightarrow T(4) = 4^{(4^{(4^4)})} = 4^{(4^{256})} = 4^U$$

$$U = 1.340780793 \times 10^{154}$$

Mais la puissance U est un nombre de 154 décimales (D) :

$$U = 13400\dots(144\text{Decimals})\dots00000$$

Or $U > 10^{100}$, en d'autres termes l'exposant est plus grand qu'un googol (un 1 suivi d'environ de 1 milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de milliard de zéro). Ce qui veut dire que l'on ne pourra pas écrire 10^{100} et encore moins 4^U sous forme décimale. Il n'y a pas assez d'atomes dans l'univers pour écrire un tel nombre sur des feuilles de papier, aussi petites soient-elles.

On peut garder les résultats sous forme de puissance de base, mais si on veut faire ces calculs en décimal, en général il faudra utiliser un module spécial ou faire un programme spécifique (voir "Decimal" en Python). Les nombres devenant tellement vite si grands, les limites des ordinateurs sont vite atteintes (dépassement de capacité, temps de calcul).

Le tétration (ou encore nappe exponentielle, hyperpuissance, tour de puissances, super-expon. ou hyper4) est une exponentiation itérée. C'est le premier hyperopérateur après l'exponentiation (Wiki).

Comme on le verra à la figure suivante il est possible **d'étendre le Tétration aux nombres réels**, par exemple $T(1.5)$. Ce résultat étrange (mais visible car la courbe est continue) fait penser au puissance réelles ou complexe d'un nombre $N = e^{1.5}$ auquel on a pu donner une signification.

6.4.2 approximation Tétration, voir à vérifier : graphique, extension au domaine des nombre réels

Ci-dessous on a les courbes noires et rouges qui représentent le Tétration 3x comparé à la façon standard de calculer une colonne de puissance contenant 3 x. Pour lever toute ambiguïté utiliser des parenthèses.

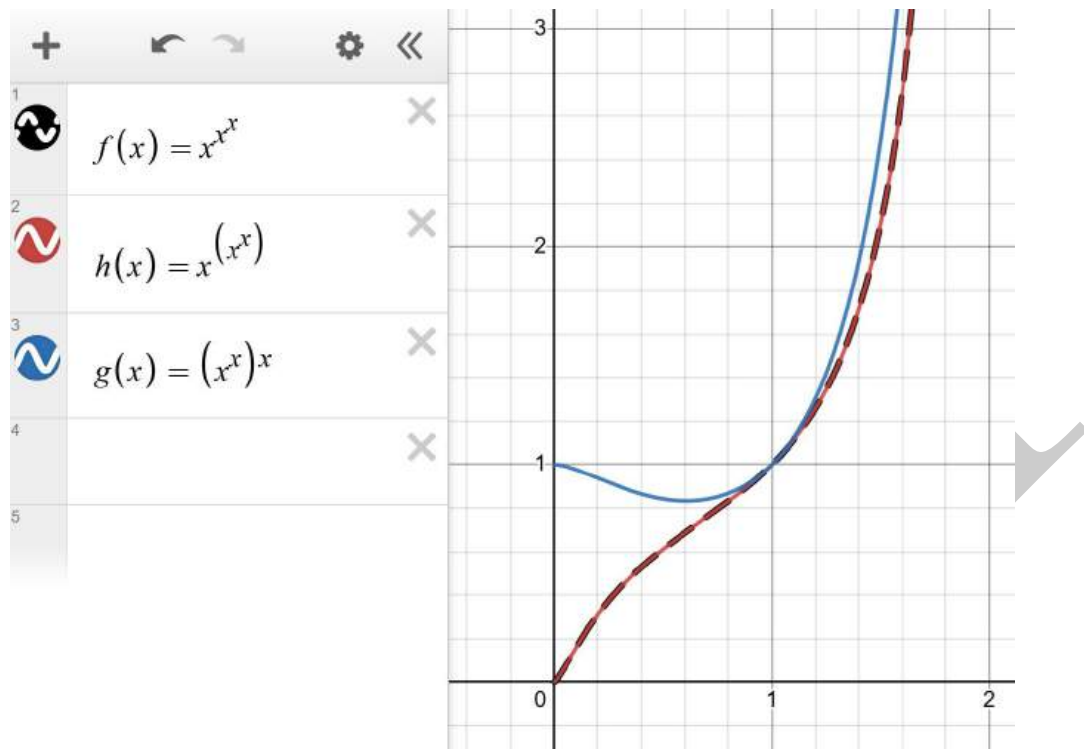


Figure 12: Opérations avec 3 nombres

Observer le départ à 0 contrairement à toute exponentielle :

En effet : A VERIFIER : et les colonnes non-entières ?

$0^{(0^0)} = 0^{(1)} = 0$ Il s'évalue du haut vers le bas, l'écriture de $f(x)$ est donc ambiguë. Le tétration n'est pas considéré comme étant une opération élémentaire (voir page suivante).

```
from decimal import Decimal, getcontext
```

```
getcontext().prec = 550
```

```
x=Decimal(4)
```

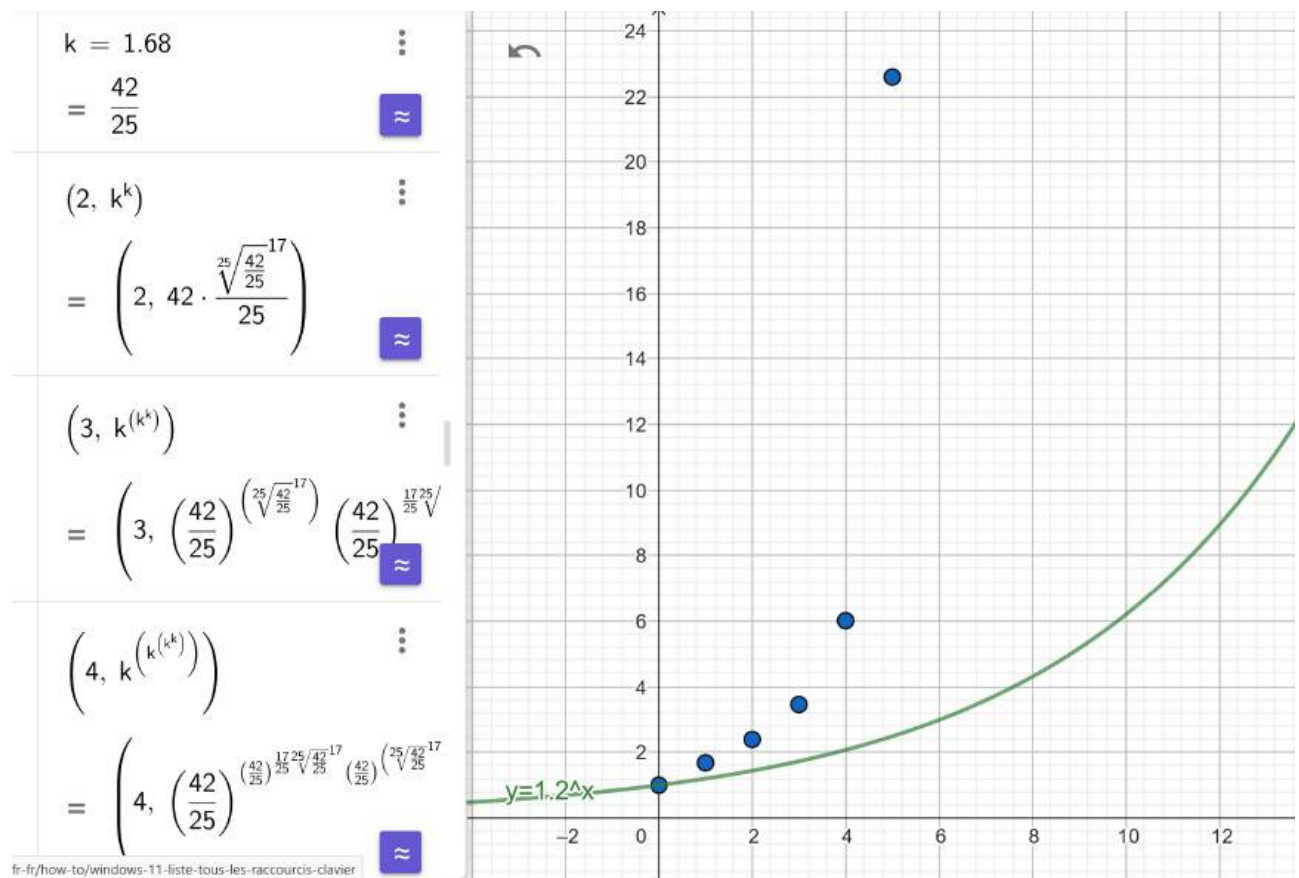
```
y=Decimal(pow(Decimal(x),Decimal(pow(x,x)))) (Erreur, on a mis 4 dans x)
```

```
Decimal('13407807929942597099574024998205846127479365820592393377723561443721764  
030073546976801874298166903427690031858186486050853753882811946569946433649006084096')
```

avec 3 ça donne : '7625597484987', comme précédemment ! Mais comment implémenter les colonnes non-entières ?

6.5 Tétration où l'on fixe la base ($k=1.68$)

Voici la progression pour n allant de 0 à 5. Avec k plus grand on ne verrait plus l'ordonnée de l'abscisse 5. Dans le cas ci-dessous, pour $n=6$, $y > 120000$.



On peut comparer la croissance avec celle de la fonction exponentielle $y = 1.2^x$ (en vert) qui est 'infiniment' plus lente. Il est difficile de tracer une belle courbe d'un tétration avec une base entière, du genre 3.

6.6.2 Notation de Knuth (suite)

$$3 \uparrow\uparrow 2 = 3^3 = 27$$

$$3 \uparrow\uparrow 3 = 3^{3^3} = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987$$

$$3 \uparrow\uparrow 4 = 3^{3^{3^3}} = 3^{7\,625\,597\,484\,987}$$

$$3 \uparrow\uparrow 5 = 3^{3^{3^{3^3}}}$$

etc.

Le terme $3 \uparrow\uparrow 4 = 3^{3^{3^3}}$ est de la forme 12580...39387 et a 3 638 334 640 025 chiffres², soit plus de $3,6 \times 10^{12}$ chiffres décimaux.

Cela permet assurément d'écrire de très grands nombres, mais Knuth ne s'est pas arrêté là. Il a poursuivi en définissant l'opérateur *triple flèche vers le haut* qui est l'application itérée de l'opérateur *double flèche vers le haut* :

$$a \uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow a \uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow a}_{b \text{ exemplaires de } a} = a \uparrow\uparrow (a \uparrow\uparrow (\cdots \uparrow\uparrow a))$$

(les opérations étant effectuées de la droite vers la gauche)

puis il a poursuivi avec l'opérateur *quadruple flèche vers le haut* :

$$a \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a \uparrow\uparrow\uparrow a \uparrow\uparrow\uparrow \cdots \uparrow\uparrow\uparrow a}_{b \text{ exemplaires de } a}$$

et ainsi de suite. La règle générale stipule que l'opérateur n -flèche b est une suite de b opérateurs $(n-1)$ -flèches. Plus généralement,

$$a \underbrace{\uparrow\uparrow\cdots\uparrow}_n b = a \underbrace{\underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{n-1} a \underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{n-1} a \cdots a \underbrace{\uparrow\cdots\uparrow}_{n-1} a}_{b \text{ exemplaires de } a}$$



6.6.3 Notation de Knuth (suite)

Dans une expression a^b , on écrit l'exposant b en *lettre supérieure*⁴. Mais beaucoup d'environnements, comme les [langages de programmation](#) et les [courriels](#) en format de texte brut, ne supportent pas cet agencement bidimensionnel. Ils ont donc proposé une notation linéaire, `a**b` pour [Fortran](#) et `a↑b` pour d'autres environnements ; la flèche dirigée vers le haut suggère l'élévation à une puissance. Si le [jeu de caractères](#) ne contient pas de flèche, l'[accent circonflexe](#) `^` ou les deux astérisques `**` sont utilisés.

Une autre notation utilisée dans cet article est \uparrow^n pour indiquer un opérateur flèche d'ordre n (où \uparrow^1 équivaut à \uparrow seul).

Comme nous l'avons dit plus haut, tous ces opérateurs (y compris l'exponentiation classique $a \uparrow b$) ne sont pas associatifs, et, en l'absence de parenthèses, doivent être associés, de droite à gauche, c'est-à-dire que l'évaluation se fait de la droite vers la gauche pour une expression qui contient au moins deux de ces opérateurs. Par exemple, $a \uparrow b \uparrow c$ signifie $a \uparrow (b \uparrow c)$, et non $(a \uparrow b) \uparrow c$ qui serait alors écrit $a \uparrow (b \times c)$:

$$3 \uparrow \uparrow 3 = 3 \uparrow^2 3 = 3^{3^3} \text{ vaut } 3^{(3^3)} = 3^{27} = 7\,625\,597\,484\,987 \text{ et non } (3^3)^3 = 27^3 = 3^{(3 \cdot 3)} = 3^9 = 19\,683.$$

Il existe une bonne raison de choisir cette évaluation de droite à gauche ; en effet, si le choix avait été de gauche à droite, alors $a \uparrow \uparrow b$ aurait signifié $a \uparrow (a \uparrow (b-1))$ et $\uparrow \uparrow$ n'aurait pas été un nouvel opérateur.

Généralisations de la notation de Knuth [\[modifier \]](#) [\[modifier le code \]](#)

Certains nombres sont si grands que la notation en flèche de Knuth devient trop encombrante pour les décrire. C'est par exemple le cas du [nombre de Graham](#). Les [flèches chaînées de Conway](#) peuvent alors être utilisées.

$$\begin{array}{ccc} a \uparrow^n b & = & a \rightarrow b \rightarrow n \\ \text{(Knuth)} & & \text{(Conway)} \end{array}$$

La flèche de Knuth sera utilisée pour les nombres petits par rapport à ceux-là, tandis que les flèches chaînées seront adaptées aux plus grands ; lorsque ces notations elles-mêmes deviennent insuffisantes, comme c'est par exemple le cas pour les [suites de Goodstein](#), il est encore possible d'employer la [hiérarchie de croissance rapide](#) (qui revient à peu près à définir la notation $a \uparrow^\alpha b$, où α est un [nombre ordinal](#) quelconque).

Voir autre illustrations dans répertoire images

6.6.4 Exemple liste opérations élémentaires

Elementary functions of a single variable x include:

- **Constant functions:** 2 , π , e , etc.
- **Rational powers of x :** x , x^2 , \sqrt{x} ($x^{\frac{1}{2}}$), $x^{\frac{2}{3}}$, etc.
- **Exponential functions:** e^x , a^x
- **Logarithms:** $\log x$, $\log_a x$
- **Trigonometric functions:** $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, etc.
- **Inverse trigonometric functions:** $\arcsin x$, $\arccos x$, etc.
- **Hyperbolic functions:** $\sinh x$, $\cosh x$, etc.
- **Inverse hyperbolic functions:** $\operatorname{arsinh} x$, $\operatorname{arcosh} x$, etc.
- All functions obtained by adding, subtracting, multiplying or dividing a finite number of any of the previous functions^[6]
- All functions obtained by root extraction of a polynomial with coefficients in elementary functions^[7]
- All functions obtained by [composing](#) a finite number of any of the previously listed functions

Certain elementary functions of a single complex variable z , such as \sqrt{z} and $\log z$, may be [multivalued](#). Additionally, certain classes of functions may be obtained by others using the final two rules. For example, the exponential function e^z composed with addition, subtraction, and division provides the hyperbolic functions, while initial composition with z^i instead provides the trigonometric functions.

Figure 13: Opérations élémentaires

7 Calcul à la main nombres décimaux (rappels)

• Addition des chiffres décimaux ①

$$12,54 + 9,785 = ?$$

$$\begin{array}{r} \\ 12,540 \leftarrow \text{ajouter } 0 \\ + 9,785 \\ \hline 22,325 \end{array}$$

① ajouter 0 si nécessaire (après la virgule)
② aligner les virgules

• Soustraction des nombres décimaux

$$1,57 - 3,2 = \overbrace{(-1) \cdot (-1)}^1 \cdot (-1,57 - 3,2) \quad \boxed{A-B = -(B-A)}$$

$$= (-1) \cdot (3,2 - 1,57) = -(3,2 - 1,57)$$

car c'est plus simple de mettre le plus grand chiffre en haut.

$$\begin{array}{r} \\ 3,20 \leftarrow \text{ajouter } 0 \\ - 1,57 \\ \hline 1,63 \end{array} \Rightarrow \text{corriger le signe} \Rightarrow \underline{\underline{-1,63}}$$

① Mettre le plus grand chiffre en haut, ajouter 0 (après virgule)
② Aligner les virgules
③ Corriger le signe

• Multiplication des nombres décimaux

5 chiffres après la virgule

$$-0,410 \cdot 0,1750 = ?$$

$$\begin{array}{r} \\ 0,410 \\ \times 0,1750 \\ \hline 7155 \end{array}$$

5 chiffres après la virgule

→ 0,07155 ⇒ -0,07155

① Mettre le plus grand chiffre en haut après avoir enlevé la virgule et les 0 à la fin du nombre
② Multiplier sans tenir compte du signe
③ Ajouter les 0 et la virgule. Il doit y avoir le même nombre de chiffres après la virgule qu'au départ. Corriger le signe

①

②

③

④

⑤

⑥

⑦

⑧

⑨

⑩

⑪

⑫

⑬

⑭

⑮

⑯

⑰

⑱

⑲

⑳

㉑

㉒

㉓

㉔

㉕

㉖

㉗

㉘

㉙

㉚

㉛

㉜

㉝

㉞

㉟

㊱

㊲

㊳

㊴

㊵

㊶

㊷

㊸

㊹

㊺

㊻

㊼

㊽

㊾

㊿

Figure 14: Addition, soustraction, multiplication

On dit qu'il doit y avoir 5 chiffres après la virgule, mais on peut aussi dire 5 décalages.

2

• Division des nombres décimaux

$$- \frac{1,147}{0,021} = ?$$

$$\frac{(+)}{(+)} = \frac{(-)}{(-)} = (+) \quad \frac{(+)}{(-)} = \frac{(-)}{(+)} = (-)$$

$$\frac{1,147}{0,021} = \frac{1147}{21} \quad \cdot \frac{(1000)}{(1000)}$$

1147	21	
105	54,61	
97		
84		
13,0		
126		
40		
21		
190		

$$\Rightarrow \frac{-1,147}{0,021} = \underline{\underline{-54,61}}$$

1) Multiplier par 10 le dividende et le diviseur jusqu'à ce que le diviseur soit un nombre entier.
2) Diviser
3) Corriger le signe

• Division Euclidienne

$\frac{\text{dividende}}{\text{diviseur}} = \text{quotient et reste}$

$$\frac{16}{15} \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{16}{3} = 5 \text{ reste } 1$$

• Décomposition en produit de facteurs premiers

180 = ? diviser par nombre premiers 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 etc

$$\frac{180}{2} = 90 \quad ; \quad \frac{90}{2} = 45 \quad ; \quad \frac{45}{2} = 22,5 \quad ; \quad \frac{45}{3} = 15 \quad ; \quad \frac{15}{3} = 5 \quad ; \quad \frac{5}{3} = 1,6 \quad ; \quad \frac{5}{5} = 1$$

2 · 2 · 3 · 3 · 5

Réduire une fraction :

$$\frac{180}{72} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 5}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = \frac{5}{2}$$

Figure 15: Division Euclidienne, décomposition facteurs premiers

7.0.1 Pour aller plus loin : crible d'Eratostène

8 Propriétés, commutativité, parenthèses, associativité

• commutativité : on peut commuter les nombres par rapport à l'addition et à la multiplication.

① $2+3 = 3+2$ ② $a+b = b+a$
 ③ $5 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ ④ $bca = abc$

⚠ ⑤ $(-7)+9 = 9+(-7) = 9-7$ (OK aussi avec nombres négatifs)
 on ne peut pas commuter les nombres par rapport à la soustraction et à la division

① $2-3 \neq 3-2$ $\frac{5}{2} \neq \frac{2}{5}$

⚠ ② $a-b = a+(-b)$ $a-b = -(b-a)$
 $2-5 = -(5-2) = -(3) = -3$

• parenthèses : on les met pour préciser l'ordre des opérations quand ce n'est pas clair.

Exemple $\rightarrow (5-3)-2 = (2)-2 = 0$
 $\rightarrow 5-(3-2) = 5-(1) = 4$

Toujours commencer avec les parenthèses le plus à l'intérieur.

$(3a - (4a - 3a)) - 2a =$
 $(3a - (a)) - 2a =$
 $(2a) - 2a = 0$

Le signe moins s'applique à chaque nombre dans la parenthèse

① $-(a+b+c) = -a-b-c$ ② $-2(a+3) = -2a-6$

• associativité : l'exemple précédent $(5-3)-2 \neq 5-(3-2)$ montre que la soustraction n'est pas associative. Par contre la (+) et la (•) le sont :

$(2+3)+5 = 2+(3+5) = 10$ $(a+b)+c = a+(b+c)$
 $(2 \cdot 3) \cdot 5 = 2 \cdot (3 \cdot 5) = 30$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Figure 16: Commutativité, associativité

8.1 Associativité (suite), formes différentes

Dans la deuxième partie de la page on montre différentes formes d'écriture de la même expression et comment on passe de l'une à l'autre. Ce sont toutes des expressions dites **équivalentes**.

- associativité (suite) ce qui s'exprime en terme de parenthèses par :

On effectue à partir de la gauche $5 + (-7) + 3 + (-2) + 4 = \left((5 + (-7)) + 3 \right) + (-2) + 4$

$5 + (-7) + 3 + (-2) + 4 =$ on peut réarranger comme on veut

$5 + 3 + 4 + (-7) + (-2) = 12 + (-9)$ (seulement avec + et -)

$5x^2 - 3b + 2x - 7 + 3b - x - 5x^2 = a - 10 + b - 2a + 3x$

$5x^2 - 5x^2 + 2x - x - 7 + 3b = a - 2a - 10 + b + 3x$

$x - 7 + 3b = -a - 10 + b + 3x$

$(-3x)$ $(-3x)$

$-2x - 7 + 3b = -a - 10 + b$

$(+7 - 3b)$ $(+7 - 3b)$

$-2x = -a - 2b - 3$

! On n'écrit pas $\cdot (-\frac{1}{2})$ $\cdot (-\frac{1}{2})$ $\cdot (-\frac{1}{2})$

mais plutôt $\cdot (-\frac{1}{2})$ $(-\frac{1}{2}) \cdot (-2x) = -\frac{1}{2}(-a - 2b - 3)$

! On peut écrire $-\frac{1}{2} \cdot x$ mais on écrit plutôt $-\frac{1}{2}x$

! Autres écritures équivalentes : $3a = 3 \cdot a$; $(2+x) \cdot (2-x) = (2+x)(2-x)$

• Signe - : $-\frac{2+a}{1+b} = -1 \cdot \frac{2+a}{1+b} = \frac{-1 \cdot (2+a)}{1+b} = \frac{-(2+a)}{1+b} = \frac{-2-a}{1+b}$

$-\frac{2+a}{1+b} = -1 \cdot \frac{2+a}{1+b} = \frac{2+a}{-1 \cdot (1+b)} = \frac{2+a}{-1-b}$

$+\frac{2+a}{1+b} = \frac{-1 \cdot (2+a)}{-1 \cdot (1+b)} = \frac{-2-a}{-1-b}$

$-\frac{2+a}{1+b} = \frac{-(2+a)}{1+b} = \frac{2+a}{-(1+b)} = \frac{-(2+a)}{-(1+b)} = \frac{-2-a}{-1-b}$

Si le nombre de signes - qui se multiplient ou qui se \rightarrow

Figure 17: Associativité, formes

8.2 Distributivité

• Distributivité

① $2 \cdot (3+5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = (6+10) = 16$ ② $-3(-1+a) = (3-3a)$

Figure 18: distributivité

8.2.1 Résoudre, effectuer

Terminologie

résoudre : en général trouver la solution d'une équation

$2x + 27 = 3x \Rightarrow x = 27$

effectuer : en général, (développer, puis simplifier)

① $\frac{x^2 + 2x}{x} = \frac{x(x+2)}{x} = x+2$

② $\frac{a+b}{a^2+2ab+b^2} = \frac{(a+b)}{(a+b)(a+b)} = \frac{1}{a+b}$

③ $\frac{a(x+b) - ax}{b} = \frac{ax+ab-ax}{b} = \frac{ab}{b} = a$

Figure 19: Terminologie

8.2.2 Parité

Un nombre est pair (even) si on peut le diviser par deux. Sinon il est impair (odd). Zéro est pair. La parité est très souvent utilisée en informatique pour détecter des erreurs lors de la transmission ou le stockage de données.

8.2.3 Et zéro, positif ou négatif ?

Un nombre positif est un nombre qui, additionné à un autre nombre, donne un nombre strictement supérieur. Un nombre négatif, à l'inverse, donnera un nombre strictement inférieur. Le nombre 0 étant l'élément neutre de l'addition, s'il est ajouté à un autre nombre, il donnera ce même nombre. Il n'est donc ni négatif, ni positif. It really depends on context. In common use in English language, zero is unsigned, that is, it is neither positive nor negative. (voir aussi limites, 0+ et 0-). La question de savoir s'il est positif et négatif à la fois, ou bien ni l'un ni l'autre, est une question de convention (choix de la signification des mots 'positif' et 'négatif'. Par exemple en France, le positif mathématique signifie positif ou nul,

8.2.4 Signes

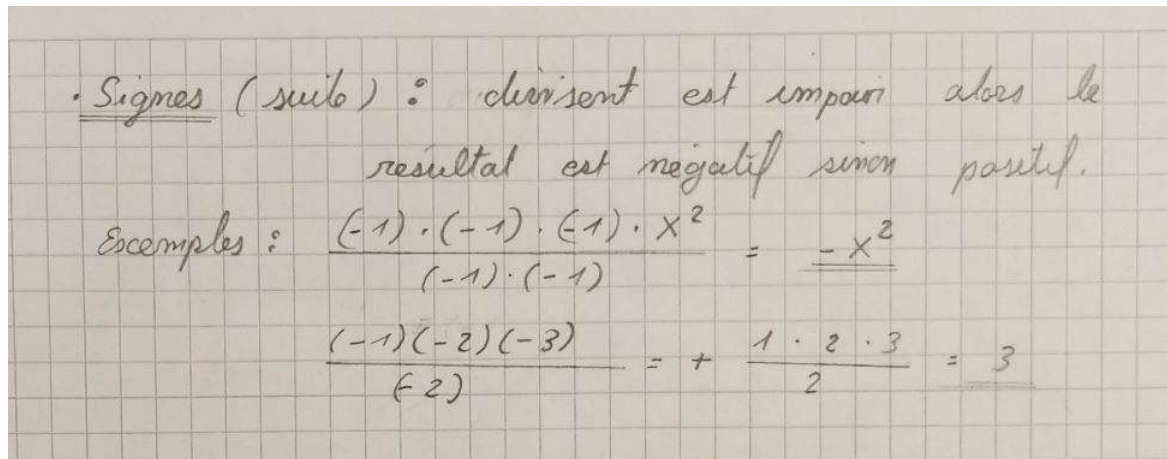


Figure 20: Signes

8.2.5 Calcul de 10 racines carrées consécutives pour refaire la table de LOG

Expliquer la démo de Feynman qui part des racines, algo de Newton Raphson :

$$R_{N+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{N}{R_N} + R_N \right)$$

8.2.6 Film de Herb Gross

De l'origine des nombres et de leur notations et du rapport avec les langues naturelles.

8.2.7 Pour aller plus loin : Groupe, anneau, élément absorbant, élément neutre etc.

9 Les opérations de base répétées

9.1 Les séries de sommes

En mathématiques, la notion de série permet de généraliser la notion de somme finie.

Étant donné une suite de terme général u_n , étudier la série de terme général u_n c'est étudier la suite obtenue en prenant la somme des premiers termes de la suite (u_n), autrement dit la suite de terme général S_n défini par :

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = \sum_{k=0}^n U_k$$

Ainsi, la suite des sommes partielles associée à la série de terme général x_n peut s'écrire : $(x_0, x_0+x_1, x_0+x_1+x_2, \dots, x_0+x_1+\dots+x_n, \dots)$

Attention aux indices qui portent souvent à confusion. En général on dit qu'on a n termes dont les indices des termes iront de 1 à n (1 à 10) ou de 0 à $(n-1)$ soit (de 0 à 9).

9.2 Du plus simple au plus compliqué

Somme de n entiers (trivial) $k + k + k + \dots = n * k$

Formule pour la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de différence d entre chaque terme (pour l'instant $d=1$ et n est fini). Dans ce genre de somme on ne peut pas utiliser n qui tend vers l'infini car la somme divergerait pour tout d . En effet les termes deviennent de plus en plus grands.

Voici la méthode que Gauss avait utilisé lorsqu'il était à l'école primaire :

Pour $k = 1$ à 10, $n=10$:

$$S_n = \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=1}^{10} k$$

$$S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = (1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + (4 + 7) + (5 + 6)$$

$$S_n = 11 + 11 + 11 + 11 + 11 = 55 = \frac{110}{2} = \frac{10 * 11}{2}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n * (n + 1)}{2}$$

En fait c'est n fois le terme moyen $5.5 = (1+10)/2$, $5.5 * 10 = 55$ Idem mais avec un facteur k devant la somme

Somme des entiers entre m et n (parler des problèmes des suites paires ou impaires)

Il y a dans la définition des sommes de séries convergentes un calcul de somme finie, suivi d'un passage à la limite. Cette deuxième étape de passage à la limite fait que l'expression 'somme infinie' n'est pas correcte pour qualifier les séries. Une telle 'somme' n'est en effet ni commutative ni associative. Il n'est pas non plus possible, en général, de dériver une telle somme terme à terme par rapport à un paramètre.

9.3 Les sommes

Commençons par un produit remarquable et essayons de trouver la valeur d'une suite géométrique de taille quelconque en étendant le principe avec plus de termes :

$$\begin{aligned}(X-1)(X+1) &= X^2 + X - X - 1^2 \\ &= X^2 - 1^2\end{aligned}$$

Dans ce qui précède on dit que les X se sont téléscopés, ils se sont annulés ! Continuons ce principe (on simplifie les puissances de 1 en écrivant seulement 1) :

$$\begin{aligned}(X-1)(X^2 + X + 1) &= X^3 + X^2 + X - X^2 - X - 1 \\ &= X^3 - 1\end{aligned}$$

On peut continuer le même principe avec autant de membres que l'on veut dans la somme de puissance on obtient toujours un résultat simple contenant deux termes :

$$(X-1)(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X^2 + X + 1) = X^n - 1$$

on retrouve donc la formule bien connue pour la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison X (ce qui est assez génial) :

$$\begin{aligned}(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X^2 + X + 1) &= \frac{1 - X^n}{1 - X} \\ (X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X^2 + X^1 + X^0) &= \frac{1 - X^n}{1 - X}\end{aligned}$$

Donc par exemple la somme géométrique de raison 1/2 donne :

$$(1/2^{n-1} + 1/2^{n-2} + \dots + 1/2^2 + 1/2 + 1) = \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2}$$

ou sous une forme plus commune :

$$(1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots + 1/2^{n-2} + 1/2^{n-1}) = \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2}$$

Si le nombre n tend vers l'infini la somme converge car X est plus petit que 1 :

$$(1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots + 1/2^{n-2} + 1/2^{n-1}) = \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} = \frac{1}{1 - 1/2} = 2$$

Mais on peut aussi écrire une forme plus générale :

$$(X-1)(X^n + X^{n-1} + \dots + X^2 + X + 1) = X^{n+1} - 1$$

on retrouve une autre formule bien connue pour la somme des N+1 premiers termes d'une suite géométrique de raison X

$$\begin{aligned}(X^n + X^{n-1} + \dots + X^2 + X + 1) &= \frac{1 - X^{n+1}}{1 - X} \\ (X^n + X^{n-1} + \dots + X^2 + X^1 + X^0) &= \frac{1 - X^{n+1}}{1 - X}\end{aligned}$$

On peut faire des extensions à de telles définitions. Cela veut dire que l'on peut associer des nombres pour des valeurs hors du domaine de définition (voir plus tard).

9.4 Les substitutions

La résolution de nombreux problèmes passe par **une substitution** de la variable initiale par une autres expression qui permet de simplifier le problème et/ou de faire disparaître certains termes, par exemple :

$$x = t - 1$$

On en utilisera de plus en plus souvent et il faut toujours se poser la question "existe-t-il une **substitution** pour ce genre de problème ?".

9.5 Convergences et existence de solutions des algorithmes qui suivent dans ce chapitre

Avertissement : ce chapitre ne contient pas de côté formel au sens strict des mathématiques et on ne démontre pas ici que ces fractions continues, les équation etc. convergent réellement à l'infini vers les valeurs considérées. Prudence donc en utilisant ces outils et toujours bien se renseigner à leur propos et au sujet des limitations de leur utilisation.

9.6 Les limites de ces séries

9.7 Les produits

9.8 Les suites de produits et leur limite

9.9 Les factorielles

9.10 Les suites de divisions et les fractions continues 'sciences étonnantes'

Il s'agit d'un algorithme répétitif qui permet d'obtenir un nombre en répétant une suite de division. Cette forme est utilisée lorsque l'on a remarqué un motif répétitif car la fraction peut se développer à l'infini. En pratique plus on utilise de terme plus le nombre converge vers sa vraie valeur. Voilà la plus simple des fractions continues :

$$N = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

On peut prendre 100 termes si on le souhaite, mais si on se contente du nombre de termes présent ci-dessus et qu'on commence par le bas en remplaçant les trois points par zéro ou 1 :

$$N = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1 + 0}\right)}\right)}$$

Voici les termes successifs obtenus en commençant par la fraction du bas :
1.0 / 0.5 / 0.666666 / 0.625 etc.

9.10.1 Cas le plus simple : le nombre d'or

Pour trouver vers quel nombre converge cet algorithme (si il converge !), on peut faire une **substitution** si on s'aperçoit que la fraction se répète :

$$N = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

$$x = \frac{1}{1 + x}$$

où

$$x = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

donc

$$x + x^2 = 1$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 * 1 * 1}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \phi \approx 0.6180339887...$$

qui est le nombre d'or vers lequel la fraction continue converge, dont on parlera plus loin avec la suite de Fibonacci ! On voit que la formule avec les divisions est facile à mémoriser !

Connaissant les propriétés du nombre d'or on peut faire le raisonnement inverse :

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

On peut aussi montrer que la fraction continue :

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots}}}}$$

Dans un cas un peu plus général :

$$x = \frac{a}{b + \frac{a}{b + \frac{a}{b + \dots}}} = \frac{a}{b + x}$$

$$x^2 + bx - a = 0$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}$$

Avec une petite manipulation on peut trouver la racine carrée de 2 en utilisant la formule précédente avec x_1 :

$$\sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}} \quad \text{avec : } a = 1 \text{ et } b = 2$$

$$x_1 = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = 0.41421\dots \approx \sqrt{2} - 1$$

Parfois les fractions continues sont une façon optimale d'approcher une valeur (**Source ?**)

9.11 Série de Engel

Il est aussi possible de construire des développements en fractions en plaçant les barres de fraction sur le **numérateur** et non en dessous : on obtient un **développement en série de Engel** :

$$x_0 = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{a_0 a_1} + \frac{1}{a_0 a_1 a_2} + \dots + \frac{1}{a_0 a_1 \dots a_n} + \dots = \frac{1 + \frac{1 + \dots}{a_2}}{a_0 + \frac{a_1}{a_0}}$$

Figure 21: Série de Engel

$$S_n = \frac{1}{a_0} \left(1 + \frac{1}{a_1} \left(1 + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} \left(1 + \frac{1}{a_n} \right) \right) \right)$$

$$\sqrt{2} = \frac{1 + \frac{1 + \frac{1 + \frac{1}{16}}{5}}{3}}{1}$$

9.12 Pour aller plus loin

Pour voir les techniques de constructions des fractions continues pour trouver des nombres rationnels, réels ou des fonctions voir l'article Wikipédia dont est tiré une partie de la section précédente.

9.13 Racines continues

$$x = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}$$

$$x = \sqrt{6 + x}$$

$$x^2 = 6 + x$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = (-2, 3)$$

Valable seulement pour $x=3$, pourquoi ? (La racine d'un nombre N est toujours positive, attention à la deuxième ligne) ! Note : on voit que la troisième ligne 'accepte' $x=-2$!

9.13.1 Equations formes particulières

Dans certain cas on peut utiliser une méthode similaire à celle du chapitre précédent pour résoudre des polynômes contenant des racines carrées.

$$\sqrt{a-x} = a-x^2$$

En effet avec cette forme d'équation ci-dessus, il ne faut pas commettre l'erreur de tout élever au carré, car on se retrouverait avec une équation du 4ème degré. Prenons un exemple numérique :

$$\sqrt{6-x} = 6-x^2$$

$$x^2 = 6 - \sqrt{6-x}$$

$$x = \pm \sqrt{6 - \sqrt{6-x}}$$

En utilisant la racine positive on voit que l'on peut substituer indéfiniment x :

$$x = \sqrt{6 - \sqrt{6-x}} = \sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6-x}}}} = \sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \dots}}}$$

En choisissant le bon endroit pour remettre x ,

$$x = \sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6-x}}}$$

$$x = \sqrt{6-x}$$

$$x^2 = 6-x$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x-2)(x+3) = 0$$

$$x = 2$$

10 Equation à une variable (inconnue), nombre de solutions et ensemble de solutions ! CORRIGER SUITE, déplacer dans 2 VAR

Dans ce qui suit on utilise indifféremment les termes variables et inconnues, mais on verra les nuances plus tard (COPIER SUITE DOC EM EQU PAGES 9, 10, 11, 12).

Une équation est une égalité entre deux expressions algébriques (deux membres) contenant une ou plusieurs inconnues ou variables (on verra les nuances plus tard). De façon générale une égalité n'est vérifiée que pour certaine(s) valeur(s) de la ou des inconnue(s)/variable(s).

On peut cumuler les équations en une suite d'égalités. L'exemple qui peut sembler stupide mais dans certains exercices on peut être bloqué parce qu'on est gêné par une forme d'écriture :

$$2x + 3y + z - 11 = -x - 2y + z + 2 = -3x - 2y + z + 4$$

Que pensez-vous de la suite d'égalités précédente, elle a été choisie pour que les réponses soient simples ? On verra ça plus loin (Faire I-II=IV, I-III=V et IV-V et on trouve tout).

Une fonction est une relation entre deux variables ou plus (c-à-d-une équation sous une forme explicite du genre $y=f(x)$), avec quelques contraintes sur lesquelles on va revenir (Toute les équations ne décrivent pas des fonctions) .

10.1 COPIER page 5 de doc EM équations (simplifier texte précédent une fois la suite importée)

10.2 Variables dépendantes et indépendantes

Même si on parlera plus des équations à une inconnue, dans ce chapitre on parlera des équations à une, deux voir trois inconnue(s) ou variable(s). Si on peut mettre l'équation sous la forme suivante $z = x + 3y + 4$ on peut dire que z est la variable dépendante et que x et y sont les variables indépendantes (on analysera tout cela en détails).

Résoudre l'équation c'est rechercher cette ou ces valeur(s). En manipulant les expressions de l'équation aux moyens d'opérations (additions, multiplications, transformations algébriques etc.) on cherche à obtenir une équation dite "équivalente" qui mette en évidence toutes les solutions.

Le principe général est que l'on applique les opérations simultanément sur le membre gauche et le membre droit de manière à ce que l'égalité soit préservée en permanence, c'est le principe de la balance qui doit toujours être équilibrée (si on ajoute 2 à gauche alors on ajoute 2 à droite).

Il faut néanmoins faire attention à ne jamais diviser par zéro et être prudent avec les opérations susceptibles de changer le domaine de définition (élévation au carré). Nous allons passer en revue les trois cas de figures qui peuvent se présenter lors de la résolution d'une équation à une inconnue et parler des opérations "à risque" ! Avec les inégalités c'est des fois encore plus la prise de tête !

11 Introduction aux Fonctions, Equation à deux variables (inconnues), dépendante et indép. (Equation décrivant une fonction)

On a vu dans le chapitre précédent que si on a une équation avec une inconnue on peut au moins trouver une solution non triviale (solution triviale : $x=0$) (sauf si on a un truc du genre : $2x=3x$). Avant d'analyser les équations, il faut revenir sur plusieurs notions très utiles dont la notion de fonction. Le but est de saisir la nuance qu'il y a entre une équation et une fonction, d'introduire de nouveaux termes et de nouveaux concepts. En effet une équation peut très bien 'définir' une fonction et une fonction peut être 'solution' d'une équation (On verra ça plus loin).

Ce qui est très intéressant avec une équation contenant deux variables, c'est qu'on peut tracer une courbe sur un plan, soit un graphique ayant un axe des X horizontal et un axe des Y vertical. Cette courbe sera constituée de tous les points (X,Y) qui satisfont à l'équation, **par exemple $y=f(x)=x$** (une des plus simples). On ne cherche pas de solution particulière de cette équation à deux inconnues (c'est impossible car si on a deux inconnues, il faut deux équations), mais plutôt à tracer le graphique de $y=x$. On voit que dans le cas de cette équation à deux inconnues il y a une infinité de solutions dans l'ensemble des nombres réels, c'est la droite de pente 1 qui va à l'infini.

11.1 Fonction sous forme explicite $y=f(x)$

Si on peut mettre l'équation sous la forme $y=f(x)=\text{termes}(x)$ c'est sa forme explicite et si pour chaque X donné il y a un et un seul Y on peut dire que Y est fonction de X. **On écrira donc $y=f(x)=x$** à la place de $y=\text{termes}(x)=x$. On peut toujours écrire une fonction ou une équation sous une forme implicite, mais pas toujours sous une forme explicite (Voir bas image).

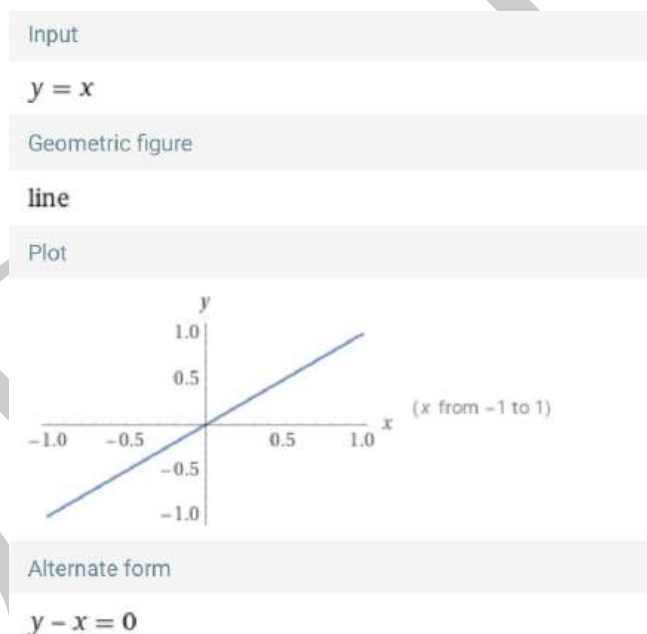


Figure 22: Affichage de tout point X et Y associé à l'équation $y=f(x)=x$

Ici la courbe est bien une fonction car pour chaque X il y a un et un seul Y possible. On pourrait aussi inverser le rôle des variables et retourner le graphique de 90° pour faire apparaître X en fonction de Y. Note : ce n'est pas possible avec toutes les fonctions (on verra plus loin). Dans ce graphique en 2D on montre la variable pour laquelle on cherche une réponse. On dit que X sur l'axe horizontal est la variable indépendante et Y est appelée variable dépendante. Mais on pourrait aussi dire que Y est une valeur inconnue et qu'en observant le graphique on peut trouver cette valeur inconnue pour tout X donné. **La droite nous montre donc toutes les solutions de l'équation $y=x$** où on pourrait dire qu'il y a deux inconnues et que l'on peut déterminer la seconde si on fixe la première. Il en va de même pour toutes les équations uniques où deux inconnues (variables) apparaissent dans les membres.

11.2 Fonction sous forme implicite $f(y,x)=0$

L'équation qui suit n'a pas de forme explicite $y=\text{termes}(x)$, mais on peut écrire sa forme implicite où il y a des termes en X, en Y, des fonctions et des nombres. (Cette équation ne représente pas exactement une fonction car pour certains X donnés il y a plusieurs Y possibles).

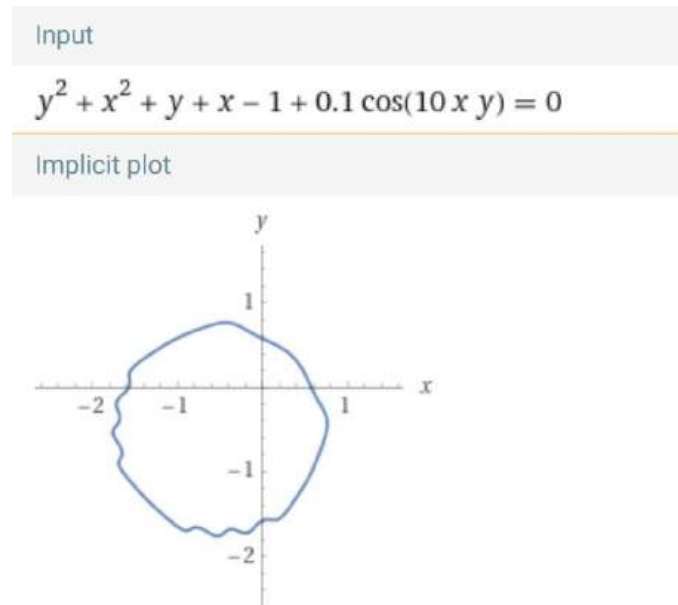


Figure 23: Affichage de tous les points X et Y associés à l'équation

On pourrait également retourner le graphique et afficher les X pour chaque Y donné. C'est la même courbe retournée, définie par la même équation reliant deux inconnues (variables). Mais on voit que l'on a pas une seule valeur possible pour un X donné et ce n'est donc pas une fonction au sens strict.

Note : Ce n'est pas parce que l'on arrive pas à mettre l'équation sous la forme explicite,

$$y = \text{termes}(x)$$

qu'il y a plusieurs solutions pour un X donné. Une simple équation

$$y = x^2 - 1$$

a déjà deux solutions **REFORMULER**.

De manière générale les relations ou les liens (les flèches dans l'exemple ci-dessous) entre les différents éléments de deux ensembles peuvent être définis par une règle de correspondance : algorithme, équation, liste de couples de valeurs (1,b),(2,c) etc. Il faut tout d'abord définir sur quoi s'appliquent ces relations ou liens dont on vient de parler. Ainsi lorsque l'on a deux inconnues dans une seule équation il s'agit souvent d'une relation de correspondance entre ces deux inconnues (variables) définissant une fonction (application).

On parlera plus en détail des fonctions plus loin dans le texte, il s'agit juste d'une introduction. Lorsqu'on peut transformer et résoudre l'équation, c'est à dire trouver la solution de l'équation en isolant une inconnue d'un côté (ci-dessous Y), on appelle cette inconnue la variable dépendante. L'autre inconnue (ci-dessous X) s'appelle la variable indépendante. Dans ce cas on a une fonction explicite de la variable Y par rapport à la variable X.

Dans ce genre de problème on a deux variables qui sont dépendantes (liées). Plus loin on verra que si ces variables ne sont pas liées et sont donc indépendantes on parlera plutôt d'un système d'équations.

$$x^2 + y^2 = 5$$

$$x - y = -1$$

Equivalent à deux courbes définies par deux fonctions implicites (membre de gauche et membre de droite ou une seule courbe membre de droite égal 0 :

$$x^2 + y^2 - 5 = x - y + 1$$

11.3 Trouver les zéros d'une fonction, résoudre la ou les équations pour y parvenir

Voici un exemple qui illustre ce que l'on veut dire par chercher les zéros d'une fonction. Prenons tout d'abord une fonction simple :

$$y = f(x) = 2x + 3$$

$$y - 2x - 3 = 0 \quad (\text{I})$$

Comme on l'a vu avant, on ne peut pas trouver de solution particulière pour x et y car le système est sous-déterminé. Oublions la notion de fonction et ne pensons qu'en termes d'équations. Il y a deux inconnues et une seule équation, donc une infinité de solutions, par contre si je dis :

$$y = f(x) = 2x + 3 = 0$$

cela veut dire que je cherche la valeur de x pour laquelle y vaut 0 ! On peut écrire cela de cette manière :

$$y - 2x - 3 = 0 \quad (\text{I})$$

$$y = 0 \quad (\text{II})$$

ce qui est bien un système de deux équations à 2 inconnues que l'on peut résoudre, en mettant (II) dans (I) par exemple (on peut aussi voir ça comme un problème à une équation et une inconnue car y a disparu, remplacée par un nombre). Notons que dans le cas présent $y=f(x)$ et on sait trouver la fonction réciproque $x = f^{-1}(y)$:

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$$

Donc on n'a même pas besoin de penser en terme de système d'équations, il suffit d'utiliser la fonction réciproque et de l'évaluer en $y=0$:

$$x = f^{-1}(y=0) = \frac{0-3}{2}$$

$$x = -\frac{3}{2}$$

On peut aussi voir le problème comme étant la solution d'une équation contenant deux fonctions de x , donc deux courbes dans le plan XY :

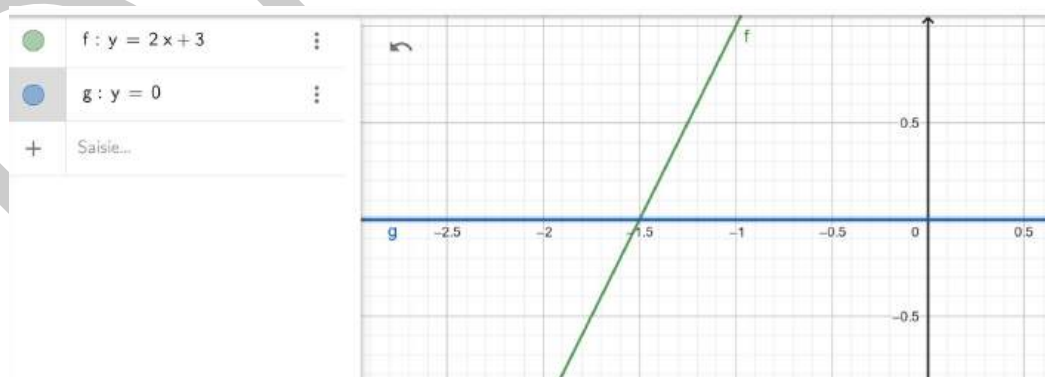
$$y = g(x) = 0$$

$$y = f(x) = 2x + 3$$

$$f(x) = g(x)$$

$$0 = 2x + 3$$

soit, en d'autres termes l'intersection de deux courbes, ici simplement deux droites :



Prenons une autre fonction explicite $y = f(x)$ mais dont il n'existe pas de réciproque sous forme explicite $x = f^{-1}(y)$ et où on doit se contenter de la forme implicite (I).

$$y = \sin^2(x) - \frac{3}{2} + \frac{x^2}{10}$$

$$\sin^2(x) - \frac{3}{2} + \frac{x^2}{10} - y = 0 \quad (\text{I})$$

C'est la fonction $y = f(x)$ affichée en traitillés rouge ci-dessous. On veut connaître pour quelle valeur de x , y vaut 0, ce qui nous donne l'équation supplémentaire :

$$y = 0 \quad (\text{II})$$

A nouveau on peut résoudre ce système de deux équation à deux inconnues, en remplaçant y par zéro dans (I) par exemple.

$$\sin^2(x) - \frac{3}{2} + \frac{x^2}{10} - 0 = 0 \quad (\text{I})$$

$$\sin^2(x) - \frac{3}{2} + \frac{x^2}{10} = 0 \quad (\text{III})$$

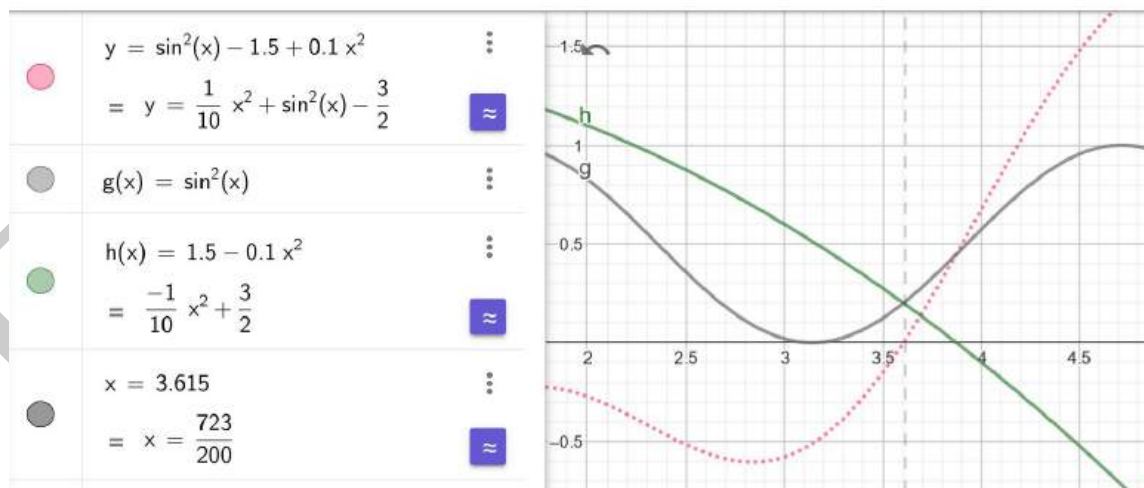
Il n'y a pas de solutions exactes pour des équations comme (III). On peut trouver des approximations avec des méthodes numériques. Cela reste néanmoins un système simple. Il le resterait même si les termes en y étaient plus compliqués, car ils deviennent des constantes dans notre cas particulier, ainsi :

$$\sin^2(x) - \frac{3}{2} + \frac{x^2}{10} - y + \cos^2(y) = 0$$

deviendrait pour $y = 0$:

$$\sin^2(x) - \frac{3}{2} + \frac{x^2}{10} - 0 + 1 = 0$$

$$\sin^2(x) + \frac{x^2}{10} - \frac{1}{2} = 0$$

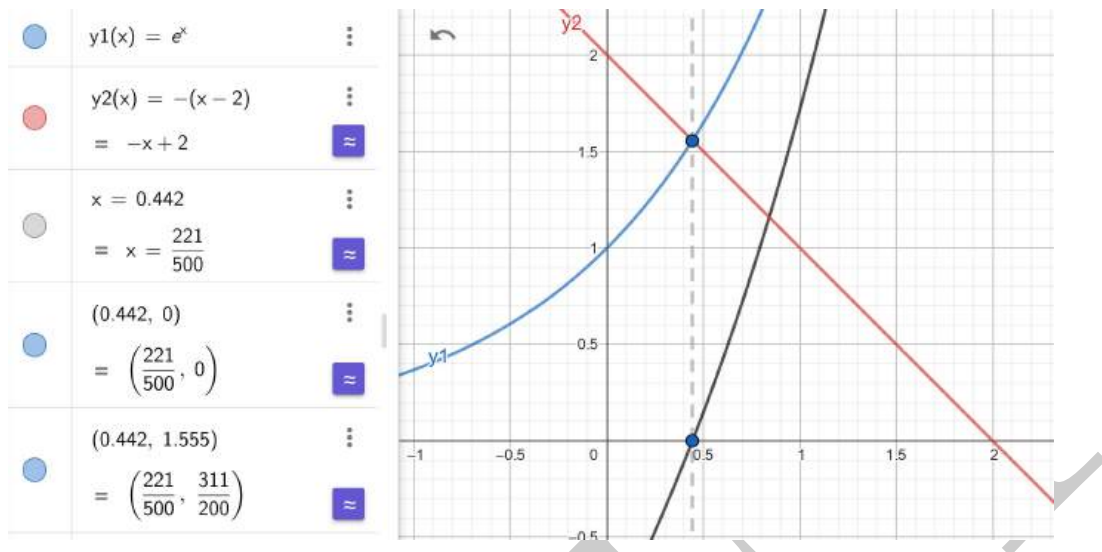


Reprenons notre fonction $y=f(x)$ pour $y=0$. on voit que l'on peut à nouveau la séparer en deux fonctions de x et la/les solution(s) est l'intersection des deux courbes ($x \approx 3.615$) :

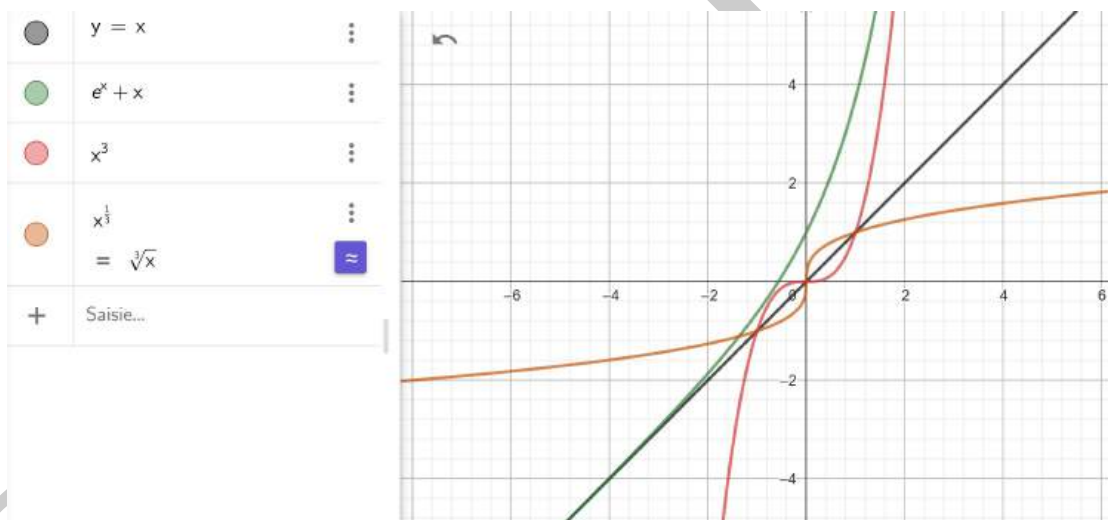
$$\sin^2(x) = \frac{3}{2} - \frac{x^2}{10}$$

11.4 Equation implicite ou doubles fonctions, bijections

Rappeler si nécessaire : qu'une implicite peut être vue comme deux fonctions (résolution problèmes comme offre et demande, droite de charge etc.),



que la symétrie des bijections se fait par rapport à la droite de pente 1, comment construire les fonctions réciproques par rotations, Pourquoi certaines bijections connues n'ont pas deux noms connus etc.



11.5 Différence entre Equation, fonction, opération et application

Une opération est une action mathématique (un algorithme), une fonction est une relation mathématique entre des ensembles de nombres (peut-être qu'on ne sait pas comment calculer les valeurs, et une équation est une expression mathématique décrivant une égalité entre deux termes.

Formellement, une addition peut être vue comme une fonction mathématique à deux variables, notée $f(x, y)$, où x et y sont les nombres que vous ajoutez, et la fonction retourne une valeur, à savoir la somme de x et y . Ainsi, si vous avez :

$$f(x, y) = x + y$$

Dans ce contexte, x et y sont les arguments de la fonction, et l'opération d'addition est réalisée pour retourner une valeur.

Cependant, il est courant de considérer les opérations élémentaires telles que l'addition, la soustraction, la multiplication et la division comme des opérations plutôt que des fonctions en raison de leur simplicité et de leur utilisation fréquente dans des calculs de base.

Les fonctions sont généralement associées à des expressions mathématiques plus complexes qui décrivent des relations entre des variables de manière plus générale.

Notes (ce qui suit n'est pas très rigoureux et à ne pas prendre au pied de la lettre) :

Ces définitions me semblent parfois un peu ambiguës. En effet Une opération comme une addition est une action ou suite de d'actions (autant de chiffres avant et après la virgule que l'on veut) que l'on sait faire (algorithme) sans aucune ambiguïté même si on ne peut pas additionner la racine de 2 à la racine de 3 avec un nombre fini d'actions. L'addition est aussi une relation entre des ensembles de nombre et pour deux nombres donnés il n'y a qu'un résultat possible.

La fonction est une relation entre deux ensembles de nombre et on peut aussi la calculer au moyen d'un algorithme (Suite d'additions et de division que l'on itère), comme une addition. elle donne aussi une seule réponse pour une valeur d'entrée. Le résultat peut être très simple comme dans le cas de la racine de 4 qui vaut 2. Néanmoins on pourrait tracer une courbe qui relie les deux ensembles et appeler ça une fonction même sans savoir comment calculer chaque valeur. Une liste de paire de nombres peut constituer une fonction discontinue pour laquelle on ne dispose pas d'algorithme. On pourrait dire qu'une opération est une fonction particulière, c'est moins général.

On entend souvent le terme "application" au lieu de "fonction". La principale différence entre les deux termes réside dans leur utilisation contextuelle. "Fonction" est le terme plus couramment utilisé et spécifique en mathématiques pour décrire une relation mathématique précise, tandis que "application" peut être utilisé de manière plus générale pour décrire une correspondance entre ensembles, même en dehors du contexte mathématique. Cependant, dans la plupart des cas, ces termes sont interchangeables lorsqu'il s'agit de décrire des correspondances mathématiques.

Pour la différence entre équation et fonction je trouve que la définition précitée n'est pas suffisante. Une équation est toujours une égalité entre deux termes qui peuvent contenir des fonctions et si il n'y a qu'une variable, en général ce n'est pas une fonction.

Par exemple $\sin(x) + x = 0$ est une équation ou on cherche x mais peut aussi être une fonction pour laquelle $y(x)=0=\sin(x) + x$.

Une fonction peut être définie parfois au moyen d'une équation (explicite ou implicite, voir plus loin). Mais il n'est pas toujours possible de trouver une équation qui permette de calculer chaque valeur d'une fonction.

Une équation permet toujours de représenter une courbe. Mais on ne peut pas toujours associer cette courbe à une fonction. Il y a des équations pour représenter n'importe quel cercle. Mais il n'y a pas de fonction "cercle". En effet on verra qu'une fonction associe toujours au plus un y à un x donné. Dans le cas du cercle, pour un x donné il y a deux y différents.

Visualiser la fonction réciproque par retournement ou basculement autour de l'axe de la droite à 45°

Les fonctions paires n'ont pas de réciproque, l'inverse n'est pas vrai (vérifier la formulation)

Introduction progressive équations et fonctions

droite hor/vert, constante

linéaire, passage zéro

affine, offset

décalages, shift, stretch, pente

Différentes forme de droite, en 2D en 3D

Forme implicite, explicite paramétrique, fonction angle

Notion point 0D, en 1D, 2D, 3D, ligne 1D en 2D et 3D, notion plan 2D en 3D, notion volume 3D.

Notion de point 0D comme intersection de ligne 1D

Définition de courbe 1D comme intersection de plans 2D

fonction inverse $xy = cst$

fonction carrée et racine, cercle dégénéré

$$y = x^2$$

conique ellipse, cercle, parabole

$$x^2 + y^2 = 1$$

11.6 Rappel géométrie : points, segments, vecteurs

11.6.1 exercice : RDV spacial simple

240324

Rdv spacial simple

Espace 2D

$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix}$ [m] [m] on décal
 $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_2 = ?$ [m/s] [m/s] \vec{p} ou \vec{r}

$2\vec{v}_1 = \vec{v}_2$

point P (2, 3)
 vecteur $\vec{F} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
 segment $P_1P_3 = 4\sqrt{5}$
 scalaire $v_1 = \|\vec{v}_1\| = 10\sqrt{5}$

$\vec{p}_1 + \vec{v}_1 \cdot t = (\vec{p}_3 - \vec{p}_2) \cdot \vec{v}_2' \cdot t$
 $\vec{p}_3 - \vec{p}_1 = \vec{v}_1 \cdot t \Rightarrow t \Rightarrow v_2' \Rightarrow \Delta v_2$

• Rdv en P_3 à t_2 , que doit être de Δv_2 à t_1 ?
 (on dit que Δv est instant.)

1) Ajustement des trajectoires : décaler les droites.
 2) On sait où elles se croisent, c'est facile de trouver $t_1 - t_2$

$\vec{r}_3 - \vec{r}_1 = (t_2 - t_1)\vec{v}_1 = t \cdot \vec{v}_1$ avec $P_1P_3 = \sqrt{\Delta x_{13}^2 + \Delta y_{13}^2} = \sqrt{64 + 16} = 4\sqrt{5}$
 $\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}$
 comme $\vec{v}_1 \parallel \vec{r}_3 - \vec{r}_1$
 $8 = 20t \Rightarrow t = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} s$
 ou $4 = 10t \Rightarrow t = \frac{2}{5} s$

$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \sqrt{400 + 100} = 10\sqrt{5}$
 $t = \frac{P_1P_3}{v_1} = \frac{4\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} = \frac{2}{5} \text{ m/s}$

$\vec{r}_3 - \vec{r}_2 = t \cdot \vec{v}_2'$
 $\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \cdot \begin{pmatrix} v_{2x}' \\ v_{2y}' \end{pmatrix}$
 $\vec{v}_2' = \begin{pmatrix} 6 \cdot \frac{5}{2} \\ 6 \cdot \frac{5}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \end{pmatrix} \text{ m/s}$
 $\vec{v}_2' = \vec{v}_2 + \Delta \vec{v}_2$
 $\Rightarrow \Delta \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ m/s}$ (veul $15 \cdot \frac{2}{5} s = 6m$)

11.7 La fonction linéaire ou une des égalités la plus simple : La droite

La droite est super importante $y = x$ car... et les coniques car...

C'est presque la fonction la plus simple, c'est donc aussi en quelque sorte l'équation la plus simple. La droite représentée par la fonction ci-dessus passe par l'origine et est inclinée de 45° par rapport à l'axe des x . C'est la ligne droite la plus épaisse dans le graphique ci-dessous. Elle passe par le point $(0,0)$ et comme elle fait un angle de 45° ($\text{Pi}/4$ radians), on constate que chaque fois que l'on avance de 1 horizontalement, on monte 1 verticalement. On pourrait aussi dire que chaque fois qu'on avance de 100 mètres on monte de 100 mètres, elle a donc une pente de 100%. Une autre façon de définir la pente est de diviser le déplacement en Y par le déplacement en X , la pente m vaut donc :

$$m = \frac{y}{x} = 1$$

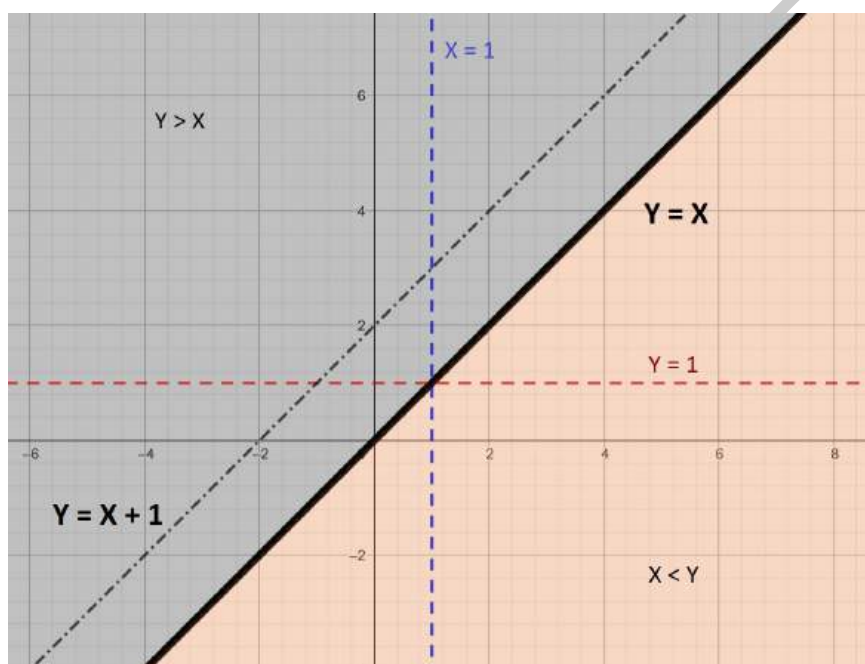


Figure 24: Droites particulières

On dit que **Y est une fonction linéaire de X**. Il y a deux droites spéciales en traitillés et qui ont une équation encore plus simple, la variable est égale à une constante. La droite horizontale $Y = 1$, qui est à la hauteur 1 a une pente nulle, soit 0% ou 0° (0 radian). La droite verticale d'équation $X=1$ est toujours à la même distance de l'axe des Y et a une pente infinie. On ne peut plus parler de % dans ce cas, mais on peut toujours dire que cette droite fait un angle de 90° ($\text{Pi}/2$ radians).

L'équation $Y = X + 1$ est la forme la plus compliquée $Y = aX + b$ que l'on peut avoir pour une droite, quelle que soit l'équation linéaire de départ. On dit que **Y est une fonction affine de X**, il y a deux paramètres et deux points suffisent à définir une droite.

$$2x + 3 - y = 7$$

$$2x + 3 - 7 = y$$

$$y = f(x) = 2x - 4$$

On peut aussi introduire la notion d'inéquations. En effet $Y > X$ et $Y < X$ sont les surfaces en dessus et en dessous de la droite $Y = X$. C'est très simple mais on verra qu'il y a déjà bien de quoi s'amuser avec les droites. Il y a aussi beaucoup de vocabulaire associé à cette notion.

11.8 Les subtilités, les décalages et les dilatations

Comme on l'a vu $y=x$ est la plus simple des relations entre x et y mais on peut toujours déplacer cette droite n'importe où dans le plan, c'est à dire faire un offset en x ainsi qu'un offset en y et on peut également toujours dilater cette droite, c'est à dire faire en sorte qu'elle progresse plus vite (pente plus raide). On a alors une relation de la forme suivante

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

Ces décalages et cette dilatation sont possibles pour toute fonction, donc de façon générale on peut toujours écrire : $y=f(x)$ et la même fonction modifiée

$$y = g(x) = f(a(x - x_0) + y_0)$$

Ne pas perdre de temps sur l'ensemble du texte suivant :



- ▶ Une fonction $f(x)$ peut être dilatée à la verticale par un facteur d'échelle a en créant la nouvelle fonction $f(x) \rightarrow af(x)$.
- ▶ Lorsqu'on dilate une fonction à la verticale, les racines de la fonction restent inchangées, de même que les coordonnées x de tous les points tournants.
- ▶ Lorsqu'on dilate une fonction à la verticale, la valeur de l'ordonnée à l'origine y , ainsi que la coordonnée y des points tournants, seront également multipliées par le facteur d'échelle.
- ▶ Lorsqu'on dilate une fonction à la verticale par un facteur d'échelle négatif, elle est réfléchiée sur l'axe horizontal, en plus de l'effet d'étirement / compression qui se produit lorsque le facteur d'échelle n'est pas égal à un facteur négatif. Cette transformation change les minima locaux en maxima locaux, et vice versa.
- ▶ Une fonction $f(x)$ peut être dilatée à l'horizontale par un facteur d'échelle a en créant la nouvelle fonction $f(x) \rightarrow f\left(\frac{1}{a}x\right)$.
- ▶ Lorsqu'on dilate une fonction à l'horizontale, son ordonnée à l'origine y est inchangée, de même que la coordonnée y des points tournants.
- ▶ Lorsqu'on dilate une fonction à l'horizontale, ses racines sont étirées par le facteur d'échelle, de même que la coordonnée x des points tournants.
- ▶ Lorsqu'on dilate une fonction à l'horizontale par un facteur d'échelle négatif, celle-ci est réfléchiée par rapport à l'axe vertical, en plus de l'effet d'étirement / compression qui se produit lorsque le facteur d'échelle n'est pas égal à moins un. Cette transformation n'affecte pas la classification des points tournants.
- ▶ On peut dilater dans les deux sens, avec un facteur d'échelle a à la verticale et un facteur d'échelle b à l'horizontale, en utilisant la transformation $f(x) \rightarrow af\left(\frac{1}{b}x\right)$.



Figure 25: Solutions équations

On reprendra le texte précédant qui est valable pour toutes les fonctions. mais nous allons montrer le plus vite possible ce qu'impliquent ces décalages sur l'équation la plus simple.

11.9 Décalages et les dilatations sur $y=x$

Ceci peut paraître tout simple mais on a vite fait de se tromper. On en reparlera à plusieurs reprises, aussi en 3D avec des fonctions de plusieurs variables.

Nous allons analyser plus en détail ce qui se passe dans le plus simple des cas, c'est à dire la modification de la fonction de X ou de l'équation la plus simple, la droite (si X_0 est positif cela décale la droite vers la droite :

$$y = f(x) = x$$

Si on veut décaler cette droite de X_0 sur l'axe horizontal, l'endroit où elle coupe l'axe horizontal, on écrit :

$$y = g(x) = (x - x_0)$$

Pour changer la pente on multiplie $(x-x_0)$ par a . Plus a est positif, plus la droite se rapproche de la verticale, si a est négatif, en plus de la pente, tout est inversé de la droite par rapport à la gauche en suivant l'axe X , le point de coupure de l'axe horizontal passe de l'autre côté mais à la même distance (Penser que le terme $(x-x_0)$ doit valoir 0).

$$y = h(x) = a(x - x_0)$$

Si l'on veut modifier la hauteur de la droite le long de l'axe Y on ajoute un offset y_0 .

$$y = p(x) = a(x - x_0) + y_0$$

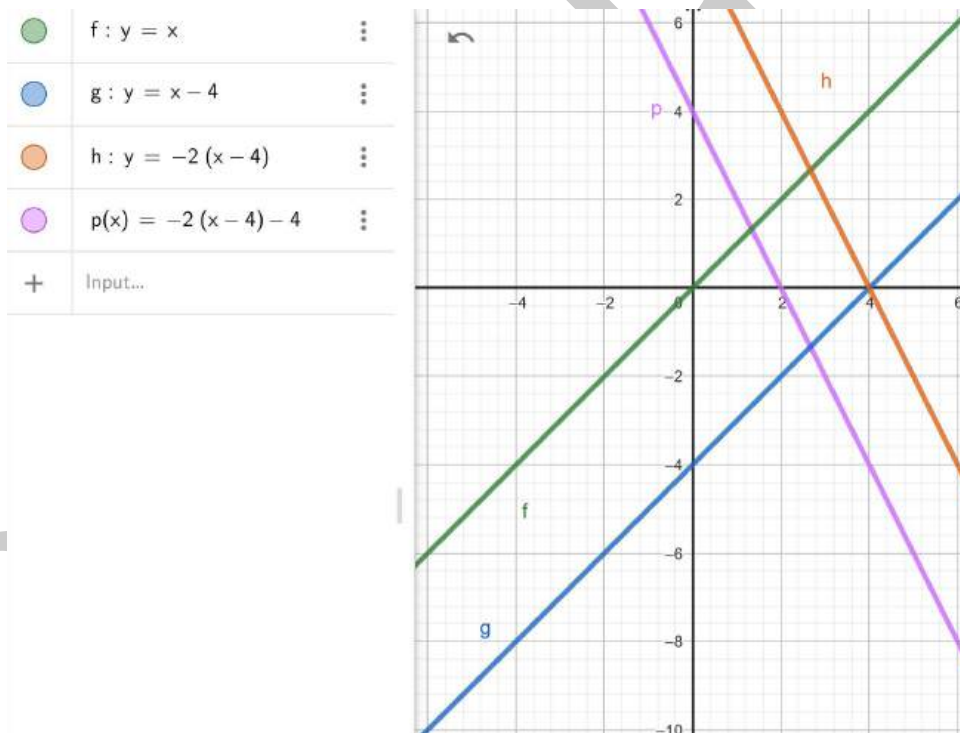


Figure 26: Dilation verticales et horizontales

Le plus important : se rappeler que $(x-x_0)$ décale toute fonction vers la droite de x_0 . Faire $-x$ fait pivoter la fonction autour de l'axe des Y .

$$y = f(x) = (ax - x_0) + y_0$$

Multiplier seulement x par une constante ne donne pas la même chose, à part la pente.

11.10 Aperçu de toutes les façons de définir une droite, usage et méthode habituelles

11.10.1 Aperçu d'autres formes d'équations pour une droite en 2D

Erreurs avec implicite et explicite au niveau des deux premières lignes ?

- Forme réduite (implicite) : $y = mx + p$ (mise en évidence de la pente m et de la hauteur p à l'origine)
- Cartésienne (explicite) : $ax + by + c = 0$
- Canonique : $y = m(x - x_0) + p$ (mise en évidence du point $Q(x_0, p)$ par lequel passe la droite et mise en évidence de la pente m .)
- Intersections avec les axes : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ (Si $x=a$ alors $y=0$, c'est donc l'endroit où la droite coupe l'axe des x . De même, on trouve l'intersection avec l'axe des y en posant $y=b \Rightarrow x=0$.)
- Distance de l'origine : $x \cos(a) + y \sin(a) = p$ (p est la distance de la droite de l'origine. L'angle a est l'angle entre le vecteur distance et l'axe des x .)
- Paramétrique : (deux vecteurs et un produit simple) $d: \vec{r}(u) = \vec{r}_o + u\vec{a}$
- Normale : (deux vecteurs et un produit scalaire) : $\vec{r} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_o) = 0$

Figure 27: Diverses formes de l'équation de la droite dans le plan

11.10.2 Récapitulation par ordre croissant de difficulté des formes des fonctions d'une droite

Le facteur qui multiplie x est la pente. Si c'est une simple lettre m on ne voit pas de points de référence P_1 et P_2 ayant des coordonnées $P = (x, y)$. Comme deux points permettent de définir une droite, on peut les mettre en évidence dans l'équation de la fonction. Si un des points se trouve être l'origine $O = (0, 0)$, on ne verra que les coordonnées de l'autre point. Dans le cas où les deux points sont distincts de l'origine la pente sera un quotient de la forme suivante :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- La plus simple, la droite horizontale : $y = y_0$, $y_0 = \text{constante} = \text{intersection axe } y$.
- On ne peut pas représenter une droite verticale avec une fonction $y = f(x)$ car il y aurait une infinité de point en ordonnée (y) pour l'abscisse $x = x_0$ ²⁰.
- La forme linéaire (**proportion "pure", rapport**) où y est proportionnel à x et $m = \text{pente}$ ($^\circ$, $\%$, nombre : $1 = 45^\circ$) :

$$y = mx = ax$$

- Forme affine où $m = \text{pente}$ (**Slope-Yintercept Form**), $y_0 = \text{intersection axe } y$ ($x = 0$) :

$$(1) y = mx + y_0 = ax + b$$

²⁰Rappel : Pour une fonction, à chaque point x en abscisse correspond au plus un seul point y en ordonnée. Bien sûr les points satisfaisant à l'équation $x = x_0$ forment une droite verticale

- Slope-intercept Form ;

$$(4) y = m(x - x_0) + y_0$$

- La première forme mettant en évidence les deux points P_1 et P_2 : En partant du point P_1 , soit de l'ordonnée y_1 et en ajoutant le delta y fonction de $x - x_1$ on arrive à y_2 lorsque $x = x_2$:

$$y_1 + (x - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = y = y_2$$

$$(2) y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

- La seconde forme s'obtient de la même manière mais en partant du point P_2 : Vérifier les signes, faut il que y_2 soit plus grand que y_1 ?

$$(3) y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_2) + y_2$$

- Maintenant en partant d'une des deux formes précédentes on peut écrire la fonction par rapport à un autre point P_0 . On cherche d'abord y_0 pour $x = x_0$:

$$y_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_0 - x_2) + y_2$$

On a deux formes possible selon que l'on remplace ou pas y_0 par sa valeur obtenue à la ligne précédente : Formes vraiment utiles ? c'est comme 2 et 3 ?

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_0) + y_0$$

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_0) + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_0 - x_2) + y_2 \quad (I)$$

On obtient de la même façon la formule suivante à partir de la première forme par rapport à P_1 et P_2 :

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_0) + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_0 - x_1) + y_1 \quad (II)$$

Si on remplace par de vrais nombres on perdra la trace de P_1 et P_2 et la fonction revient à la forme vue précédemment (Slope-Intercept) :

$$(4) y = m(x - x_0) + y_0$$

En résumé on connaît tout d'une droite si on connaît deux points P_1 et P_2 ou un point P_0 et la pente m !

- Forme paramétrique (2ème version):

$$x = \alpha t$$

$$y = \beta t$$

11.10.3 Trouver l'équation de la fonction de la droite

- Si on connaît un seul point P_0 et la pente m on utilise la formule (4).
- Si on connaît deux points P_1 et P_2 :

Méthode I : on utilise directement la formule (2) ou la formule (3) en substituant les coordonnées de P_1 et P_2 .

Méthode II : on utilise deux fois la formule (1) : $y = mx + y_0$

On met sous forme d'un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues où on cherche m et y_0 :

$$xm + y_0 = y$$

$$x_1m + y_0 = y_1$$

$$x_2m + y_0 = y_2$$

11.10.4 Pour aller plus loin : Aperçu d'autres formes d'équations pour une droite en 3D

Comme une droite est un objet qui peut exister aussi bien en 2D qu'en 3D, voici quelques formes de ces équations en 3D à titre d'exemple.

Les formes réduites, cartésiennes et canoniques de l'équation de la droite n'existent pas dans l'espace. En effet, dans l'espace, une droite sera définie par l'intersection de deux plans qui eux, sont définis chacun par une équation cartésienne. On peut exprimer une droite au moyen d'un système de deux équations cartésiennes du genre :

- **Système d'équations** :
$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$
- **Paramétrique** : (deux vecteurs et un produit simple)
$$d: \vec{r}(u, v) = \vec{r}_o + u\vec{a} + v\vec{b}$$
- **Normale** : (deux vecteurs et un produit scalaire) :
$$\vec{r} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_o) = 0$$

Figure 28: Diverses formes de l'équation de la droite dans l'espace

Distance entre droites, points, plans etc.

11.11 Matière à réflexion pour aller plus loin : début des systèmes à 2 ou plusieurs variables/inconnues et équations

Même si on a qu'une équation (deux équations compactées, voir (3) ci-dessous), chaque membre peut représenter une courbe dans le plan $y = f_1(x)$ et $y = f_2(x)$. La ou les solutions de l'équation sont le ou les points d'intersection de ces courbes. Ci-dessous nous avons donc deux droites dans le plan. Il s'agit d'un **système de deux équations à deux inconnues**, x et y .

$$y = f_1(x) = (x - 1) \quad (1)$$

$$y = f_2(x) = -(x - 1) \quad (2)$$

$$x - 1 = -(x - 1) \quad (3)$$

$$2x = 2$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 0$$

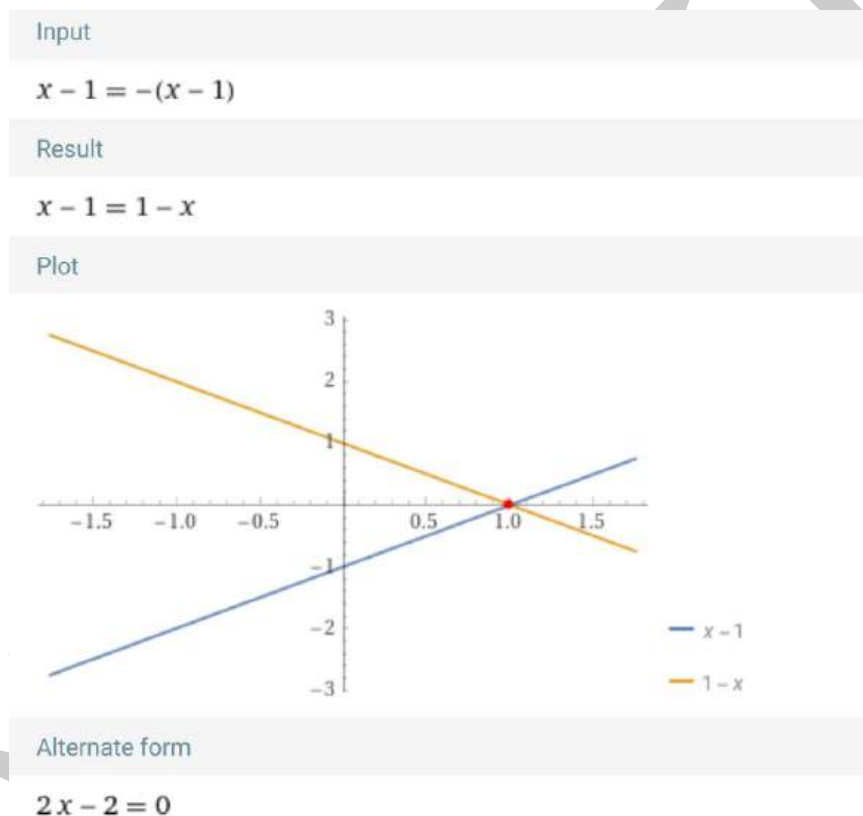


Figure 29: Solutions équations

Le système le plus simple serait le croisement d'une droite verticale avec une droite horizontale, par exemple les droites $f_1 = x = 1$ et $f_2 = y = 2$. Même si ce problème est très simple, on a un problème de formalisme. On en reparlera (la première équation est la droite verticale).

$$y = f_1(x = 1) = -\text{inf} \Rightarrow \text{inf}$$

$$y = f_2(x = -\text{inf} \Rightarrow \text{inf}) = 2 \Rightarrow (y = 2, x = 1)$$

11.12 Equations linéaires avec trois variables/inconnues

On ne peut pas trouver le croisement de deux droites en 3D avec le même principe. Un système avec trois inconnues $z = f_1(x, y)$ et $z = f_2(x, y)$ permet de trouver l'intersection entre deux surfaces, ce qui pourrait être une droite. On reviendra aussi sur ce problème plus loin.

11.13 La fonction valeur absolue $y=abs(x)$

$$y = |x|$$

Il y a une différence entre l'équation d'une droite que l'on peut aussi appeler fonction linéaire et la fonction valeur absolue que l'on définit par zones (on associe une équation à chaque zone etc.).

Propriétés : la fonction valeur absolue n'est pas linéaire, c'est d'ailleurs la plus simple des fonctions non linéaire (avec la fonction signe, mais cette dernière peut être dérivée de $abs(x)$ etc.) C'est encore une fonction très simple mais on a vite fait des erreurs, attention !

11.14 La fonction reLu(x) utilisée dans les réseaux de neurones

Vieux concepts (traitement du signal) très à la mode aujourd'hui en IA. Mais toujours dans les exemples de fonctions les plus simples.

Montrer sa déf avec des valeurs absolue et qu'il est facile de la shifter et d'approximer des fonctions par segments linéaires de droite etc.

C'est une fonction qui utilise l'équation de la droite et la fonction valeur absolue.

●	$y = \frac{2x + 2 + 2x + 2 }{2}$ $= y = \frac{1}{2} 2x + 2 + x + 1$	⋮
●	$- \frac{2x + 0 + 2x + 0 }{2}$ $= - x - x$	⋮
●	$\frac{2x + 2 + 2x + 2 }{2} - \frac{2x + 0 + 2x + 0 }{2}$ $= - x + \frac{1}{2} 2x + 2 + 1$	⋮

Figure 30: ReLu(x), fonction que l'on peut décaler facilement

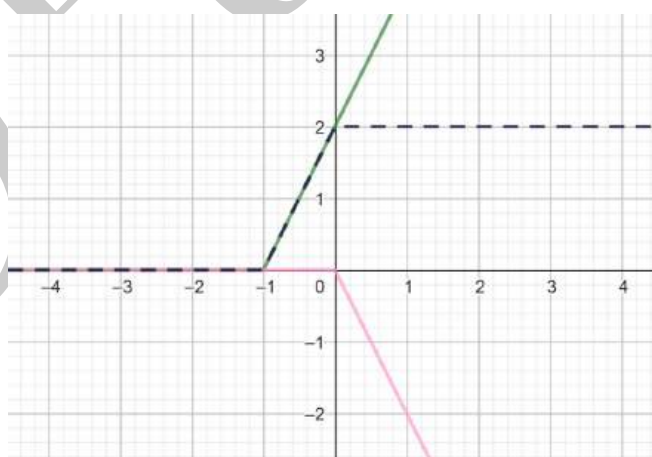


Figure 31: Obtention facile de l'approximation d'une fonction au moyen de plusieurs reLu(x)

Parler plus tard de la fonction $\max(a,b)$ et rappeler que $\text{reLu} = \max(0,x)$, on peut faire aussi des fonctions triangles et saut indiciel etc.

12 Système d'équations linéaires à deux inconnues

Un système d'équations à 2 inconnues parfaitement déterminé contient 2 équations. Résoudre le système c'est rechercher les valeurs des inconnues qui satisfont les 2 équations simultanément. Comme dans le cas de l'équation unique, il est possible qu'il y ait une, plusieurs, voir une infinité de solutions. Il se peut aussi qu'il n'y en ait aucune. A nouveau, après avoir trouvé les solutions d'une équation, il faut vérifier qu'elles sont compatibles avec les contraintes et qu'elles sont bien solutions des équations de départ. Si on a des solutions réelles on peut illustrer le problème avec un graphique (dans le plan, 2D).

Il faut être très attentif lorsqu'on cherche les équations à partir de la donnée du problème. On peut être tenté de résoudre le problème sans poser le systèmes d'équations mais on a vite fait de tomber dans un piège.

12.1 Exercice de biais cognitif, essayez de résoudre ce problème sans poser les équations



Figure 32: Batte et balle

Sans réfléchir et sans calculer on aurait envie de dire que la balle vaut 10 euros et la batte vaut 100 euros même si on sent que c'est une embrouille. Si on pose le système d'équations, ce sera juste à tout les coups !

On pose x = prix de la balle et y = prix de la batte :

$$x + y = 110(1)$$

$$y = x + 100(2)$$

on a deux équations à deux inconnues, il suffit de mettre (substituer) (2) dans (1),

$$x + y = x + (x + 100) = 110$$

$$2x = 110 - 100$$

$$x = 5$$

donc la balle vaut 5 euros,

$$y = x + 100 = 105$$

et la batte 105 euros !

12.2 Systèmes d'équations linéaires à N inconnues, systèmes paramétriques et/ou incomplets

Le principe reste le même qu'avec les systèmes à 2 inconnues. D'après la théorie, un système contenant N inconnues doit avoir exactement N équations (linéairement indépendantes, si non, en fait, c'est qu'il y a plusieurs fois la même équation déguisée etc.) pour qu'on puisse le résoudre. Le système sous sa forme générale ressemblera à ceci :

$$a_0X + b_0Y + c_0Z = d_0$$

$$a_1X + b_1Y + c_1Z = d_1$$

$$a_2X + b_2Y + c_2Z = d_2$$

et on apprend différentes techniques pour résoudre ce genre de système. En fait ces techniques sont très répétitives et pas spécialement complexes en soit. Résoudre un système de 10X10 c'est super pénible, long et ennuyeux mais conceptuellement c'est pas plus complexe qu'un système de 3X3. Alors en général si le prof de maths n'est pas trop sadique il ne fera pas d'examen avec un système plus compliqué que 3X3.

Par contre, je me suis rendu compte que souvent on pouvait être perturbés si le système est écrit sous une forme un peu différente. Voici ce qu'on pourrait rencontrer comme problème dans un examen. Donnée du problème : résoudre le système d'équations paramétriques à 3 inconnues suivant :

$$A + \frac{2}{3}B + C - 2 = B - \frac{3}{2}r = 0(1)$$

$$C - \frac{4}{6}B = 1(2)$$

Et là on se dit, c'est quoi ce bordel, on dirait qu'il n'y a que 2 équations et 3 inconnues, mais pas présentes dans chaque ligne, et c'est quoi ce 'r' etc. ?

Alors on commence à résoudre de façon automatique, sans réfléchir, et on fait des fois des conneries :

dans (2) j'isole C,

$$C = 1 + \frac{4}{6}B$$

que je vais mettre dans (1),

$$A + \frac{2}{3}B + (1 + \frac{4}{6}B) - 2 = B - \frac{3}{2}r = 0$$

On avance un peu, mais quel bordel, et c'est quoi ce 'r', encore une fois ? Est-ce qu'il y a assez d'équations ? On arrivera peut-être à résoudre le problème en suivant ce genre de chemin mais il y a plus simple !

En fait on est allé trop vite et on n'a pas bien compris le problème et le sens du mot 'paramétrique'. On voit qu'on a 3 équations et qu'il y a 4 lettres, A, B, C et r ! Généralement dans ce genre de problème 'r' est appelé le paramètre. De plus chaque égalité de la première ligne vaut 0.

Il représente un nombre arbitraire comme dans la formule pour calculer la surface du carré $S = r^2$. On est bien d'accords, dans cette formule on ne dit pas que 'r' est une inconnue, on dit que c'est un nombre que l'on peut choisir au dernier moment, quand on veut faire le calcul de la surface du carré, donc c'est un paramètre. Ce concept est très important.

Ce que l'on nous demande c'est de trouver les valeurs de A, B et C qui sont les trois inconnues, en fonction du paramètre 'r', rien de plus. Donc, ne pas donner à 'r' une signification plus mystérieuse qu'un simple nombre que l'on a pas encore choisi ! Evidemment 'r' va nous faire chi* dans tous les calculs ! En effet il est ineffaçable car contrairement à $3+1=4$ où 3 se fond dans le nombre 4, **r + 1 donne toujours r + 1 !**

J'espère que je n'ai pas rendu les choses plus confuses, car en plus, si l'on compare avec la forme générale du système d'équations à 3 inconnues,

$$a_0X + b_0Y + c_0Z = d_0$$

$$a_1X + b_1Y + c_1Z = d_1$$

$$a_2X + b_2Y + c_2Z = d_2$$

le notre est beaucoup plus simple. En effet il n'y a pas toutes les inconnues dans chaque ligne (mais c'est un système valide et c'est la donnée du problème). Alors c'est cool car cela veut dire que l'on devra faire beaucoup moins de calculs ! Reprenons notre système :

$$A + \frac{2}{3}B + C - 2 = B - \frac{3}{2}r(1) = 0(1)$$

$$C - \frac{4}{6}B = 1(2)$$

Mais il y a-t-il réellement que 2 équations ? Non, on peut faire **2 équations à partir de la première ligne car les 2 égalités valent 0** :

$$A + \frac{2}{3}B + C - 2 = 0$$

$$B - \frac{3}{2}r = 0$$

Remettons un peu d'ordre et utilisons la loi du moindre effort, on a bien notre paramètre r et 3 équations à 3 inconnues (même si elles ne sont pas dans chaque ligne) :

$$A + \frac{2}{3}B + C = 2(1)$$

$$B - \frac{3}{2}r = 0(2)$$

$$C - \frac{4}{6}B = 1(3)$$

J'isole B dans (2), et pour B ce sera terminé ! Ça n'ira pas plus loin car ' r ' est le paramètre !

$$B = \frac{3}{2}r(4)$$

Je mets (4) dans (3) pour trouver C et encore une fois, ce sera terminé pour C !

$$C - \frac{4}{6}B = 1 \Rightarrow C = 1 + \frac{2}{3}B = 1 + \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 2}r = 1 + r(5)$$

Enfin on met B et C dans (1) pour avoir A (il aura fallu 3 lignes, mais elles sont simples),

$$A = 2 - \frac{2}{3}B - C = 2 - \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 2}r - (1 + r) = 2 - r - (1 + r) = 1 - 2r(6)$$

$$[A = 1 - 2r; B = \frac{3}{2}r; C = 1 + r]$$

verifier et si $A = \text{cst}$

12.3 Système de N équations écrites sur une seule ligne

A VERIFIER On a inventé l'exemple suivant en posant les valeurs $X=Y=Z=1$. De plus pour l'instant chaque équation vaut 0.

$$X + Y + Z - 3 = 2X - 2Y + 2Z - 2 = 3X + 3Y - 3Z - 3$$

Dans l'exemple suivant X, Y et Z sont toujours égales à 1 et on a corrigé les équations pour qu'elles valent 1, mais la forme ici présente ne permet pas de le deviner, il faut donc le noter !

$$X + Y + Z - 2 = 2X - 2Y + 2Z - 1 = 3X + 3Y - 3Z - 2 = 1$$

On peut utiliser les trois expressions pour créer 3 nouvelles équations :

$$X + Y + Z - 2 = 2X - 2Y + 2Z - 1 = 0 \Rightarrow (1)$$

$$X + Y + Z - 2 = 3X + 3Y - 3Z - 2 = 0 \Rightarrow (2)$$

$$2X - 2Y + 2Z - 1 = 3X + 3Y - 3Z - 2 = 0 \Rightarrow (3)$$

ce qui est un système de 3 équations à 3 inconnues écrites sur trois lignes différentes qu'il n'y a plus qu'à résoudre de manière systématique.

12.4 Introduction aux matrices et résolution des systèmes d'équations à N inconnues, déterminant

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ x_3 & x_4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

inversion d'une petite matrice 2x2

12.5 Indépendance linéaire

Soit le système suivant : $Y - 2 = 0$ et $X - 3 = 0$

Il faut sous entendre : $0X + 1Y - 2 = 0$ et $1X + 0Y - 3 = 0$

possède la solution $X=3$ et $Y=2$

Soit $X + Y = 0$ et $X - Y = 0$

Ne possède que la solution triviale $X=Y=0$

Soit $X + Y = 0$ et $2X + 2Y = 0$

Ne possède que la solution triviale $X=Y=0$

Soit $X + Y = 1$ et $X + Y = 2$

Ne possède pas de solutions

Soit $X + Y = 1$ et $2X + 2Y = 2$

13 Les inégalités

Lorsqu'on cherche à résoudre des inéquations (inégalité) il y a un piège auquel il faut faire très attention. Si on multiplie des deux côtés par un nombre négatif, il faut changer le signe (inférieur devient supérieur et inversement). Il en va de même avec l'inconnue, donc si on multiplie par X il va falloir séparer la résolution du problème en deux parties : la première partie où X est positif et la seconde partie où X est négatif (ré-écriture de l'expression avec le signe changé). Il faut également changer le signe si on inverse chaque côté de l'expression et attention tout se complique encore si on élève au carré ou si il y a des valeurs absolues.

13.1 Première méthode

Dans cet exercice on n'est pas obligé de passer par une inversion des termes. Au contraire, on va présenter une première méthode qui est plus prudente. On met tout au même dénominateur et on ne simplifie pas l'expression.

1) $\frac{1}{X} > \frac{2}{5}$

mise au même dénom. (il faut en tenir compte)

2) $\frac{5}{5X} > \frac{2X}{5X}$

3) $\frac{5 - 2X}{5X} > 0$ $X \neq 0$

tableau des signes

num	$5 - 2X > 0$			
	$-\infty$	0	$\frac{5}{2}$	∞
	+	+	-	-

expression

dénom	$5X$			
	$-\infty$	0	$\frac{5}{2}$	∞
	-	X	+	+

expression

--- X + X ---

$S \in]0, \frac{5}{2}[$

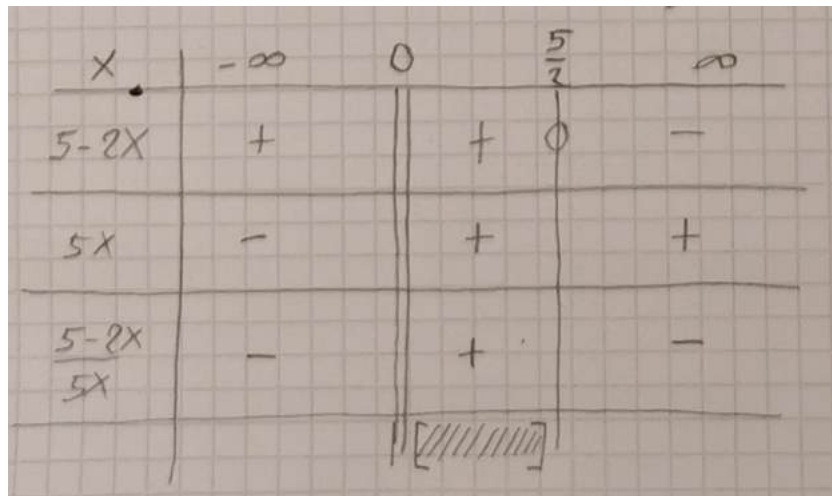
Diagram: A number line from $-\infty$ to ∞ with a tick mark at 0 and $\frac{5}{2}$. The interval $]0, \frac{5}{2}[$ is shaded with diagonal lines.

Figure 33: Inéquation méthode I

L'expression qui doit être supérieure à 0 a une autre forme, mais cela n'a pas d'importance pour résoudre le problème. Note : lorsqu'on met au même dénominateur on amplifie la fraction avec X (X / X), donc on a pas besoin de changer de signe. Ensuite il faut repérer les points particuliers (zéros, valeurs interdites etc.) et étudier l'évolution des signes séparément au numérateur et au dénominateur.

13.1.1 Format standard du tableau des signes

Pour le tableau des signes il faut privilégier cette forme car les informations sont mieux présentées.



x	$-\infty$	0	$\frac{5}{2}$	∞	
$5-2x$	+	+	0	-	
$5x$	-	+	+	+	
$\frac{5-2x}{5x}$	-	+	-	-	
	[//////]				

Figure 34: Tableau

Donc il n'y a qu'un endroit où l'inégalité est respectée (entre 0 et $\frac{5}{2}$). On voit que l'intervalle est ouvert car on admet ni le zéro (division par 0), ni le $\frac{5}{2}$ (strictement supérieur à).

13.2 Seconde méthode

Cette seconde méthode est un peu plus directe, mais il faut être plus attentif à ce qu'on fait. Comme on multiplie les deux côtés par X on voit qu'il faut procéder en deux étapes pour ne pas se tromper avec le sens du signe d'inégalité (X positif et X négatif).

1) $\cdot 5X$ ou ($X > 0$)

$$\frac{5X}{X} > \frac{5X \cdot 2}{5}$$

$$5 > 2X$$

$$0 < X < \frac{5}{2} \Leftrightarrow 0 < X < \frac{5}{2}$$

2) $\cdot 5X$ ou ($X < 0$)

$$\frac{5X}{X} < \frac{5X \cdot 2}{5}$$

$$5 < 2X$$

$$X > \frac{5}{2} \text{ pas possible car } X < 0$$

$\Rightarrow S =]0, \frac{5}{2}[$

$2X < 5$ deux équations

I) $2X$

II) 5

The figure also includes a graph on a coordinate system with x and y axes. A horizontal line is drawn at y=5. A diagonal line is drawn through the origin with a slope of 2, labeled y=2x. The region between these two lines for x > 0 is shaded, representing the solution set. The x-axis is marked with 5/2 at the intersection point of the two lines.

Figure 35: Inéquation méthode II

On voit qu'on trouve rapidement au point 1 l'intervalle qui est la solution du problème. Au point 2 on vérifie qu'aucun autre intervalle ne doit être ajouté, ce qui est le cas, car l'inégalité n'est pas possible.

Comme dans le cas d'un système de deux équations à deux inconnues (X et Y) (soit deux fonctions) où les solutions sont les intersections des courbes, on peut tracer les deux inégalités dans le plan. On aura plutôt des zones à la places des points d'intersection.

$$2x < 5$$

doit d'abords être mis sous la forme équivalente suivante pour tracer les deux fonctions :

$$y_1 = f(x) = 2x < y_2 = g(x) = 5$$

13.3 Systèmes d'inéquations

13.4 Test du triangle, triangle dégénéré

Soit un triangle ABC avec les sommets nommés A, B et C. Ce triangle existe si et seulement si le système de trois inégalités suivant est vérifié :

$$AB + BC > CA$$

$$BC + CA > AB$$

$$CA + AB > BC$$

En effet la violation d'une de ces trois inégalités voudrait dire que l'on ne peut pas fermer le triangle avec les trois segments. Le cas limite est celui où un des côtés est exactement égal à la somme des deux autres. Dans ce cas on a les deux premières lignes droites parfaitement parallèles avec la troisième qui est exactement la somme des deux autres. Ce qui revient à dire que le triangle n'a pas de surface même si on peut quand même noter les trois points A, B et C. Ce cas limite se nomme triangle dégénéré.

13.5 Matière à réflexion : pour aller plus loin avec le début des systèmes à plusieurs équations et inéquations

Soit trois 'expressions' algébriques avec trois inconnues, (on devrait dire deux équations et une inéquation, mais perso je n'aime pas tellement le terme 'inéquation', je préfère 'inégalité'). Je vous laisse seul juge pour dire si c'est un système compliqué ou pas :

$$\begin{aligned}A &= \frac{B}{3} \\2B &= 3C \\A &> C\end{aligned}$$

Si A, B et C sont les vitesses de trois voitures, comparer ces vitesses entre elles et **dire laquelle ferait le plus de 'blessures' à un piéton à l'arrêt**. Essayer de résoudre ce problème de façon intuitive, sans méthode rigoureuse, mais en faisant un raisonnement logique impliquant un peu de physique et de sens commun.

Si ça à l'air compliqué, c'est voulu, c'est juste pour illustrer que l'on peut vite rencontrer des problèmes avec des systèmes qui ont l'air tout simples. (Ils ne sont pas non plus si compliqués que ça). La réponse apportera une petite surprise à certains. Pour ma part je trouve que c'est difficile de prévoir cette petite surprise en jetant un seul coup d'oeil au problème.

On a trois expressions qui mettent en relations trois grandeurs et il faut essayer d'exprimer ces dernières en fonction d'un paramètre que l'on appellera V (vitesse d'un véhicule en direction des X positifs sur l'axe horizontal). On va dire que dans un premier temps, la vitesse réelle (la vitesse que l'on mesure au compteur, 100 ou 110 km/h) n'a pas une importance majeure dans la résolution du problème.

Essayer d'abord de résoudre ce problème, mais sans passer plus de 5 minutes, après quoi vous pouvez lire la suite ! Pour commencer je transforme la première équation :

$$B = 3A$$

donc (déduction non essentielle à la résolution du problème, mais ça aide),

$$B > A$$

c'est à dire que B est plus rapide que A, ensuite je modifie la forme de la deuxième équation :

$$B = \frac{3C}{2} = 1.5C$$

donc (déduction non essentielle à la résolution du problème, mais ça aide), **pas terrible le >**

$$B > C$$

on voit que B est aussi plus rapide que C. **La voiture B est donc la plus rapide, le problème est donc fini, mais allons dans les détails**. Mettons cette valeur dans A :

$$A = \frac{B}{3} = \frac{3C}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{C}{2} = 0.5C$$

donc en plus de savoir que B est la plus rapide on connaît maintenant exactement A et B en fonction de C (si on donne une vitesse arbitraire à C, on peut tout déduire à partir de là). On peut aussi en déduire que :

$$A < C$$

Tout à l'air de bien aller, mais en fait il y a un problème. On a pas encore tenu compte de la dernière expression ($A > C$) et elle rentre en contradiction avec le résultat précédent ($A < C$). Cette inégalité du début fait partie de la définition du problème et elle a la priorité ! Que se passe-t-il ? Peut-on lever cette contradiction ?

Oui on trouve la solution si on réfléchit un peu plus au concept physique de vecteur-vitesse (vélocité, velocity), qui a une intensité, une direction et un sens ainsi qu'au concept de vitesse pure (speed, fastness) qui est un nombre scalaire, donc sans notion de sens ni de direction.

La solution est que le vecteur-vitesse est orienté vers les X négatifs. Donc les véhicules vont dans l'autre sens que celui auquel on s'attendait. Si on définit V en tant que nombre positif ($V > 0$), $-V$ signifiera que le véhicule se déplace dans le sens des X négatifs :

donc sur la droite des nombres réels : $C = -V$, $A = \frac{-V}{2}$ et $B = \frac{-3V}{2}$

-X < ——— B(-3V/2) ——— C(-V) ——— A(-V/2) ——— 0 ——— >+X

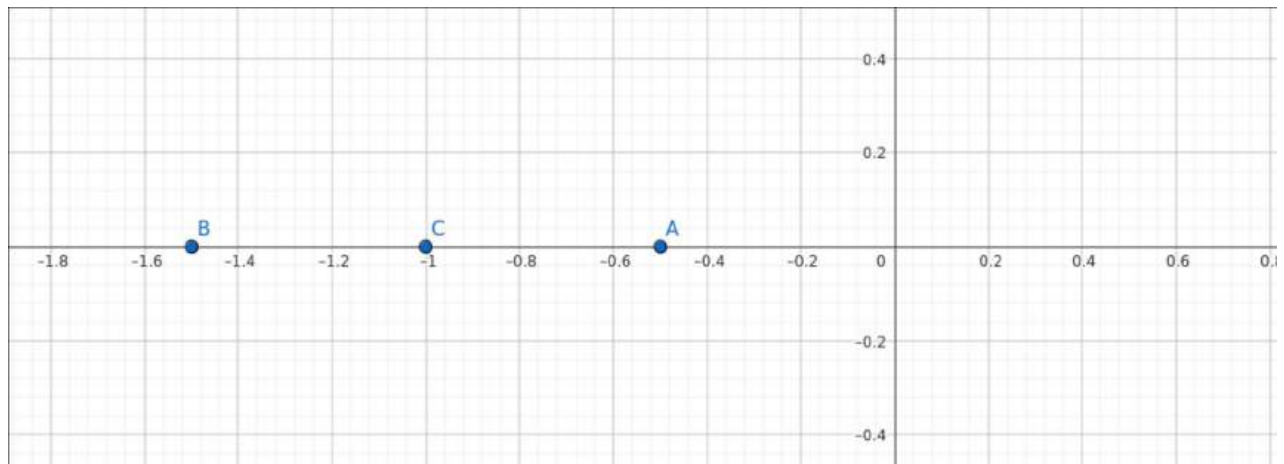


Figure 36: B: La plus méchantes des trois voitures, même si sa vitesse est inférieure

sur cette droite ont voit que : $V_b < V_c < V_a$!

Mais dans la réalité physique et en ce qui concerne l'énergie pendant le choc ($E = 1/2mv^2$), c'est la norme du vecteur vitesse qui compte donc $N_b > N_c > N_a$, les blessures seront plus graves avec la voiture B. (La norme c'est la valeur absolue, le signe $-$ devient un $+$)

Notes : Pour ceux qui sont familiers avec les dérivées, le vecteur-vitesse est définit en tant que dérivée du vecteur position par rapport au temps (ci-dessous les symboles devraient être des vecteurs) :

$$v = \frac{dx}{dt}$$

PS : On voit que les définitions précises peuvent être très utiles et on peut se dire que vitesse, vecteur-vitesse, tout ça c'est pinailler en fait ! Cela me fait penser à l'anecdote que je racontais à mon frère à propos de mon prof de physique du Tech qui disait à son garagiste qu'il ne voulait pas connaître la pression de ses pneus, mais la surpression ! On imagine ce que pensait le garagiste.

A CORRIGER, AVEC LES VRAIS NOMS ET LES NUANCES A APPORTER

Néanmoins à l'extrême opposé de l'ouvrier mécano dont on ne saurait se passer, il y a des définitions qui ont de l'importance. Ce qui sème la confusion c'est que parfois, c'est trop ! Dans les sciences 'molles' (philo etc.), ou dans ce domaine c'est moi qui suis un peu le mécano, je cite " Mais qu'est ce que tu entends exactement par le mot 'chaise' " Non, non, je ne me moque pas :) " !

Pour aller plus loin dans ce genre de problématique, je vous laisse vous référer aux philosophes modernes, à certains psychothérapeutes, existentialistes, ou DeLeuze, Foucault, de la nouvelle vague, imposteur etc. En résumé : utiliser les mots et définitions qu'il convient lorsqu'il y a risque d'ambiguïté, sinon bien souvent on prend le risque de passer pour un beauf !

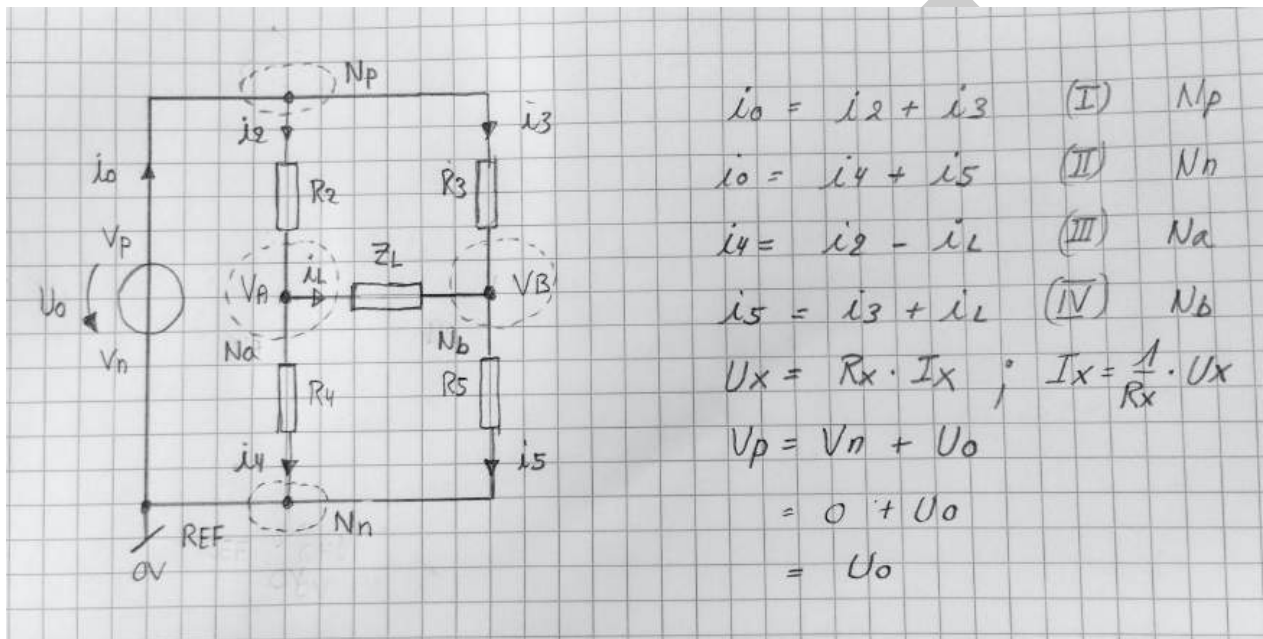
DRABEF

14 Exemple maths appliquées : circuit électrique, pont en H et RC

Dans cet exemple on ne va pas donner trop de détails sur la partie électrique du problème mais plutôt montrer quelles méthodes et quels trucs qui existent pour faciliter la résolution de ce genre de problème. On analysera ce pont électrique plus à fond dans le document de physique.

Trouver les courants électriques et les tensions d'un pont en H est un problème extrêmement important²¹ en électricité et il est encore **faisable à la main** dans certains cas. De nos jours on ne s'aventure plus à résoudre des problèmes plus compliqués car **ça prend beaucoup de temps**, et c'est ce qu'on aimerait mettre en évidence ici, la difficulté et le temps nécessaire pour avoir des réponses précises.

Mais, pour ne citer qu'un exemple, aujourd'hui une grande partie des moteurs électriques modernes sont commandés par ce genre de dispositif et pour des moteurs réels, les calculs se font par ordinateurs.



Voici une petite explication et il n'est pas nécessaire de tout comprendre pour suivre la partie algébrique de la résolution du problème.

Dans le schéma ci-dessus on pourrait connecter un moteur au milieu du pont, à la place du composant appelé Z_L . Les composants R_2 à R_5 qui sont des résistances peuvent représenter les interrupteurs qui pilotent le moteur et qui permettent de le faire tourner dans les deux sens. Le cercle traversé par un trait continu représente la source de tension qui fournit l'énergie au moteur. Une source de tension²² est simplement une pile, une batterie ou une prise 220V d'appartement fixée dans un mur.

Dans ce chapitre on ne mettra pas un moteur, **mais on fera une démonstration avec une toute petite ampoule électrique**, comme l'ampoule orange d'un tournevis testeur de courant, ce qui sera amplement suffisant. On montrera également un deuxième exemple, un plus compliqué, avec un condensateur²³. Ces deux exemples auront en commun la première partie des raisonnements.

²¹D'un point de vue pédagogique déjà !

²²Il existe aussi des sources de courant mais nous n'en parlerons pas ici.

²³Un condensateur est une sorte de réservoir qui accumule de l'électricité

14.1 La croissance rapide des difficultés de résolution des problèmes mathématiques

Avertissement : Quand on est étudiant bien entendu, c'est la donnée du prof. et la précision qu'il demande qui prime. Dans les calculs de la vie de tous les jours et dans bien des cas pratiques, un résultat ayant une précision de 1% est très souvent suffisant ²⁴

Commençons par ce qui gêne, montrons des stratégies et parlons des cas limites ou faut pas se faire avoir, truc simple insoluble, limite calculabilité

Limiter le nombre de termes :

Vous avez sans doute remarqué que chaque fois qu'on ajoute un terme ou une variable dans une parenthèse, dans un dénominateur, le nombre de calculs augmente de plus en plus vite :

Deux termes au carré donnent 4 termes :

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$$

Quatre termes au carré donnent plus que le double :

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + ab + ac + ad + b^2 + ba + bc + bd + c^2 + ca + cb + cd$$

Bien sûr, on peut simplifier en groupant des termes, mais une bonne habitude est de ne pas mettre, de négliger, les termes qui ont peu d'importance.

Idem pour des fonctions de petits nombres à des puissances élevées, et simplifier les fonctions...

14.2 Arrondir dès que possible

14.3 Calcul par ordinateur

Il peut être important de bien choisir les algorithmes de calculs (matrice, EDO, itération, Newton-R etc.)

²⁴Il faut ajouter que parfois, c'est même pas possible de faire mieux !

14.4 Solutions exactes

Dans les équations Diophantiennes, on trouve des rés exacts, pyth $a^2 + b^2 = c^2$.

Par exemple, si on cherche les solutions de l'équation :

$$y^2 - x^2 = 16$$

Il y a deux inconnues et une équation, donc en principe cela nous donne une infinité de solutions, comme dans l'équation de la droite $y = ax + b$, qui admet une infinité de couples de points (x_0, y_0) satisfaisant la relation.

Sauf qu'ici, on impose que les solutions soient des entiers relatifs (\mathbb{Z}), ce qui change la donne ! On doit donc chercher des couples de nombres entiers relatifs (voir chapitre des équations Diophantiennes).

$$y^2 - x^2 = 16$$

$$(y + x)(y - x) = 16$$

On peut vérifier qu'il y a 4 couples de solutions :

$$(5 - 3)(5 + 3) = 16$$

$$(-5 - (-3))(-5 + (-3)) = 16$$

$$(-5 - 3)(-5 - (-3)) = 16$$

$$(5 - (-3))(5 - (-3)) = 16$$

Mais c'est rare d'avoir ça dans la réalité. En effet, si on prend au hasard une équation de la forme $3x^2 + 4x + 7 = 0$, quelle est la probabilité que ce soit des \mathbb{N} ? Y a une racine dans la formule, faut que le déterminant soit un carré. . .

Et le côté d'un carré qui vaut 1,1, de toute façon un carré réel aura ça ? pourquoi pas 1.10000000000000000456987659872039 ?

Limite des machines : Quelles machines vous donnera l'aire du carré correcte (la précision est limitée dans la machine aussi)

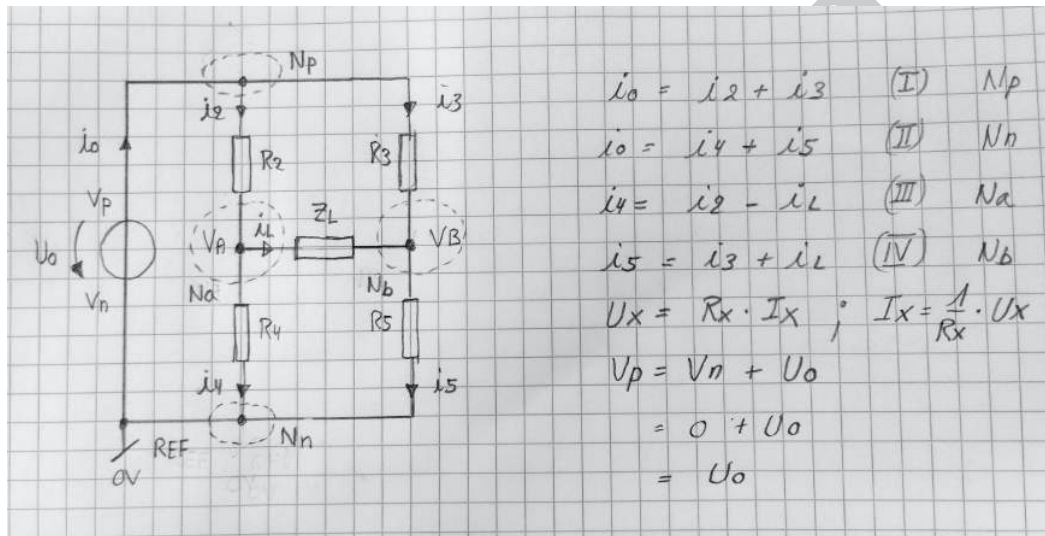
On va voir que si les opérations se répètent ça peut être la cata ou ça peut se compenser...

14.5 Analyse du circuit et mise en équations

On dit que l'on connaît tout d'un circuit si on connaît toutes les tensions ou tous les courants. Pour rechercher l'ensemble des courants, on utilise la méthode dite **des mailles**. Pour trouver toutes les tensions, on utilise la méthode **des nœuds**. C'est cette dernière que nous allons utiliser. Dans un premier temps, on va prendre un circuit composé de 5 résistances, $R_2 \dots R_5$ et R_L , notées Z_L , ainsi que d'une source de tension. De plus, nous utiliserons la fameuse **loi d'Ohm**²⁵ qui donne la relation entre le courant et la tension dans une résistance²⁶ :

$$U = R \cdot I$$

On ne peut presque pas faire plus simple. La relation entre le courant et la tension de la source est encore plus simple, c'est une droite horizontale, la tension étant en abscisse et le courant en ordonnée. Donc pour une tension donnée, il peut y avoir n'importe quel courant. C'est une **source idéale**. Ce n'est qu'un modèle, une telle source n'existe pas dans la réalité, mais pour nos calculs cela ne posera aucuns problèmes.



Donc, le problème contient déjà des simplifications, car la source est idéale et la loi d'Ohm est en quelque sorte aussi un modèle idéal. Mais cela n'impactera pas du tout les choses importantes que l'on va apprendre en étudiant ce circuit, nous nous sommes simplement débarrassé de ce qui n'était pas essentiel ici, dans ce problème.

Il nous faut trouver le nombre de tensions inconnues qu'il y a dans ce circuit. Chaque point qui est simplement relié par une ligne est à la même tension. Par contre, dès qu'il y a un composant entre deux, la tension change.

Observons le bas du circuit. On va définir une référence et on lui associera une tension arbitraire nulle, $V_{REF} = 0V$. On connaît **notre première** tension.

Ensuite la tension du haut V_p est simplement égale à la tension V_n à laquelle on ajoute la constante U_0 . Donc la tension $V_p = V_n + U_0 = V_{REF} + U_0 = U_0$. C'est notre **2ème tension** connue.

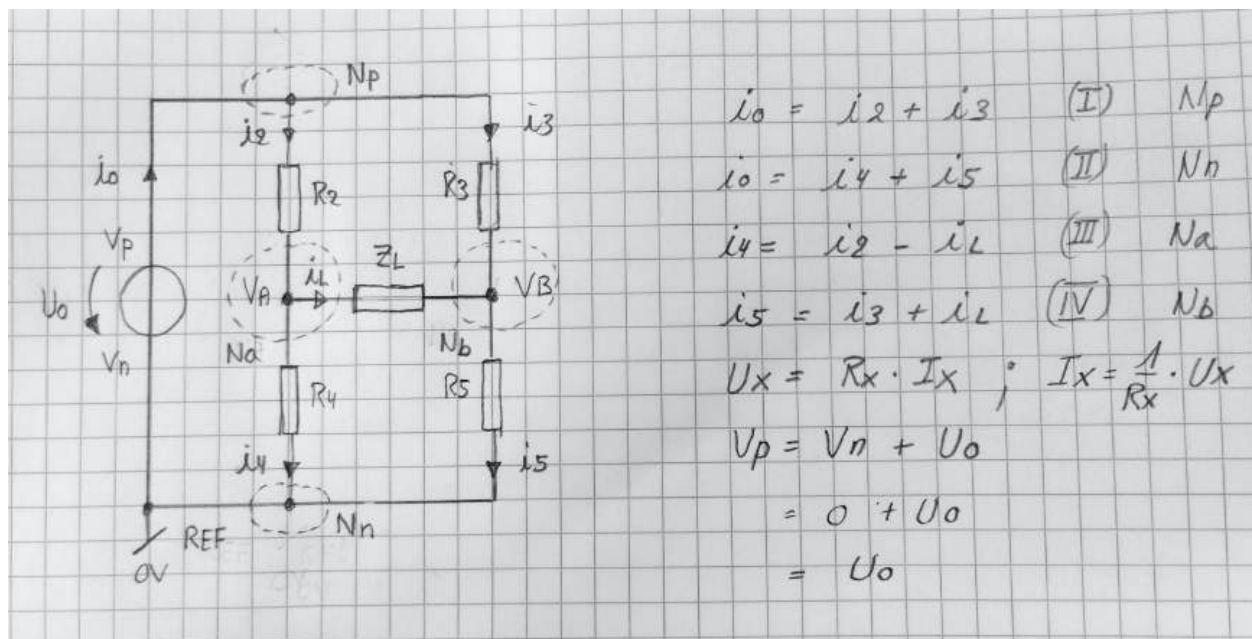
Il y a toute une théorie qui nous permettrait de savoir combien il faudrait poser d'inconnues en fonction du nombre de nœuds et du nombre de sources de tension, mais ici on voit facilement qu'il nous reste **deux tensions inconnues, les tensions V_A et V_B** . Il nous faudra donc deux équations !

²⁵Et les lois de Kirshoff

²⁶Aussi valable pour les matrices

14.6 Méthode des Nœuds : somme des courants entrants dans un nœud égale à la somme des courants sortants

Et ici, on va utiliser les petites équations écrites à droite qui résument les liens qu'il y a entre les courants. Tout se passe comme dans un circuit hydraulique, on peut additionner les débits.



$$\begin{aligned} \frac{U_0 - V_A}{R_2} &= \frac{V_A - V_B}{Z_L} + \frac{V_A}{R_4} \\ \frac{U_0 - V_B}{R_3} + \frac{V_A - V_B}{Z_L} &= \frac{V_B}{R_5} \end{aligned}$$

Voilà, les équations sont posées ! Il n'y a plus qu'à isoler V_A et V_B ! En fait on a simplement équilibré les débits des courants électriques. les équations ci-dessus sont une autre forme des équations suivantes :

$$i_2 = i_L + i_4$$

$$i_3 + i_L = i_5$$

Pour simplifier l'écriture, on va aussi travailler avec des **conductances**, qui sont simplement l'inverse des résistances, $G_x = \frac{1}{R_x}$. La loi d'Ohm s'écrira sous la forme suivante :

$$I = G \cdot U$$

C'est une autre façon de dire la même chose. Sous forme verbale on dirait : le courant I (débit) est proportionnel à la tension U (pression). Donc on écrit sous cette nouvelle forme les deux équations ci-dessus ou apparaissent les résistances R2-R5 et ZL :

$$G_2 U_0 - G_2 V_A = G_L V_A - G_L V_B + G_4 V_A$$

$$G_3 U_0 - G_3 V_B + G_L V_A - G_L V_B = G_5 V_B$$

soit après simplification :

$$(G_2 + G_4 + G_L) V_A - G_L V_B = G_2 U_0$$

$$G_L V_A - (G_3 + G_5 + G_L) V_B = -G_3 U_0$$

14.7 Comparaison de différentes méthodes

Nous avons appliqué une méthode rigoureuse pour retrouver directement les valeurs de V_A et V_B . Par contre on va se compliquer un peu la vie et faire deux exercices. Un premier avec des valeurs numériques et un deuxième en laissant les symboles G_X .

Nous allons créer nous même le problème, comme le ferait un prof, en choisissant les valeurs de V_A et V_B ainsi que toutes les autres valeurs nécessaires.

14.7.1 Création d'un exercice et vérification des résultats avec numériques

Reprenons le système d'équation de la page précédente et mettons le sous forme matricielle (Voir chapitre systèmes linéaires)²⁷.

$$\begin{bmatrix} (G_2 + G_4 + G_L) & -G_L \\ G_L & -(G_3 + G_5 + G_L) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2 U_0 \\ -G_3 U_0 \end{bmatrix}$$

On choisit les valeurs à retrouver, $V_A = 0.8V$ et $V_B = 0.6V$ (ainsi que les valeurs des courants i_2 à i_5). On pose $U_0 = 1V$, et on trouve $G_2 = 10S$, $G_3 = 5S$, $G_4 = 5/4S$, $G_5 = 5S$ et $G_L = 5S$. Les conductances s'expriment en Siemens [$S = \frac{1}{\Omega}$].

Ces six valeurs numériques sont les données du problème que l'on va remettre dans le système d'équations du départ pour le vérifier²⁸.

$$G \cdot U = \begin{bmatrix} 65/4 & -5 \\ 5 & -15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix} = I$$

Note : La fraction ci-dessus vient de : ($65/4S = 10S + 5/4S + 5S$). Nous allons maintenant résoudre le système ($G \cdot U = I \Rightarrow U = G^{-1}G \cdot U = G^{-1}I$) en utilisant un petit calculateur en ligne matrixcalc.org :

$$\begin{cases} (10+1.25+5) x_1 + -5 x_2 = 10 \\ 5 x_1 + -(5+5+5) x_2 = -5 \end{cases}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 0,069 & -0,023 \\ 0,023 & -0,074 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

On a retrouvé 0.8V et 0.6V ! Avec ces deux valeurs on peut calculer toutes les autres valeurs.²⁹

14.7.2 Résolution analytique et méthode de Cramer

Si on veut une réponse analytique, avec tous les paramètres, il faut repartir avec le système d'équations et on peut résoudre par substitution, élimination ou inversion matricielle, mais ça serait trop laborieux.

Si on a la méthode de Cramer 2D en tête je trouve que c'est beaucoup plus direct car il n'y a quasiment pas de manipulations algébriques, mais attention aux signes !

²⁷Dans cette partie de l'exercice on utilise des conductances à la place des résistances, $G = \frac{1}{R}$

²⁸On verra dans le cours de physique les détails pour construire ce problème numérique, il faut juste s'assurer qu'il soit cohérent en posant progressivement des valeurs arbitraires et des valeurs déduites par simple calcul

²⁹Que signifient les valeurs et les vecteurs propres dans ce contexte (voir notes "Ebauche EDO", milieu page 14.06.24) ?

14.8 Calculs à la main avec la méthode des Noeuds

14.8.1 Rappel méthode de Cramer :

Si $ad - bc \neq 0$, le système

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

a pour unique solution :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}.$$

Système d'équation de départ pour appliquer la méthode. Ne pas griller les étapes !

$$\begin{bmatrix} (G_2 + G_4 + G_L) & -G_L \\ G_L & -(G_3 + G_5 + G_L) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2 U_0 \\ -G_3 U_0 \end{bmatrix}$$

Dans l'équation ci-dessous on vérifiera la substitution des colonnes du numérateur,

$$V_A = \frac{\det \begin{bmatrix} G_2 U_0 & -G_L \\ -G_3 U_0 & -(G_3 + G_5 + G_L) \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} (G_2 + G_4 + G_L) & -G_L \\ G_L & -(G_3 + G_5 + G_L) \end{bmatrix}} = U_0 \frac{-G_2(G_3 + G_5 + G_L) - G_3 G_L}{-(G_2 + G_4 + G_L)(G_3 + G_5 + G_L) + (G_L)^2}$$

$$V_A = U_0 \frac{G_3 G_L + G_2(G_3 + G_5 + G_L)}{(G_2 + G_4 + G_L)(G_3 + G_5 + G_L) - (G_L)^2}$$

$$V_B = \frac{\det \begin{bmatrix} (G_2 + G_4 + G_L) & G_2 U_0 \\ G_L & -G_3 U_0 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} (G_2 + G_4 + G_L) & -G_L \\ G_L & -(G_3 + G_5 + G_L) \end{bmatrix}} = U_0 \frac{-G_3(G_2 + G_4 + G_L) - G_2 G_L}{-(G_2 + G_4 + G_L)(G_3 + G_5 + G_L) + (G_L)^2}$$

$$V_B = U_0 \frac{G_2 G_L + G_3(G_2 + G_4 + G_L)}{(G_2 + G_4 + G_L)(G_3 + G_5 + G_L) - (G_L)^2}$$

C'est presque fini, il n'y a plus qu'à soustraire V_a à V_b . Mais on voit que le nombre de termes est déjà assez important :

$$V_{A-B} = U_0 \frac{G_3 G_L + G_2(G_3 + G_5 + G_L) - G_2 G_L - G_3(G_2 + G_4 + G_L)}{(G_2 + G_4 + G_L)(G_3 + G_5 + G_L) - (G_L)^2}$$

$$V_{A-B} = U_0 \frac{G_2 G_5 - G_3 G_4}{(G_2 + G_4 + G_L)(G_3 + G_5 + G_L) - (G_L)^2}$$

$$V_{A-B} = U_0 \frac{G_2 G_5 - G_3 G_4}{(G_2 + G_4)(G_3 + G_5) + G_L(G_2 + G_3 + G_4 + G_5)}$$

Comme précédemment, à partir de là on peut calculer tous les courants et on connaît tout du système. De plus l'avantage de la méthode analytique c'est qu'en réarrangeant les termes on peut déduire plusieurs propriétés intéressantes de ce genre circuit :

$$V_{A-B} = U_0 \frac{G_2 G_5 - G_3 G_4}{G_L(G_2 + G_3 + G_4 + G_5) + (G_2 + G_4)(G_3 + G_5)}$$

14.8.2 Simplification grâce à une propriété de la méthode de Cramer :

Un des avantages de la méthode de Cramer est que contrairement aux autres méthodes on peut rechercher uniquement la valeur de la variable qui nous intéresse.

Si $ad - bc \neq 0$, le système

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

a pour unique solution :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}.$$

Si on analyse bien le circuit on voit qu'on peut se contenter de ne chercher que la valeur de la tension V_a . Ainsi on peut diviser par deux le nombre de calculs. C'est comme si on ne cherchait que x dans les équations ci-dessus. Repartons du système d'équations du début :

$$\begin{bmatrix} (G_2 + G_4 + G_L) & -G_L \\ G_L & -(G_3 + G_5 + G_L) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2 U_0 \\ -G_3 U_0 \end{bmatrix}$$

et on continue les calculs à la main pour trouver V_a :

$$\begin{bmatrix} 65/4 & -5 \\ 5 & -15 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_A \\ V_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$V_A = \frac{\det \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -5 & -15 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 65/4 & 5 \\ -5 & -15 \end{bmatrix}} = \frac{(10 \cdot -15) - (-5 \cdot -5)}{(65/4 \cdot -15) - (-5 \cdot 5)} = 0.8V$$

On trouve le courant I_L en faisant la différence entre les courants $I_2 - I_4$ ce qui est presque immédiat, puis la tension aux bornes de G_L .

$$I_L = (U_o - U_a)G_2 - (U_a - 0)G_4 = \frac{2}{10} \cdot 10 - \frac{8}{10} \cdot \frac{5}{4} = 1A$$

$$U_L = \frac{I_L}{G_L} = \frac{1}{5} = 0.2V$$

On a donc trouvé les deux tensions solutions de notre problèmes :

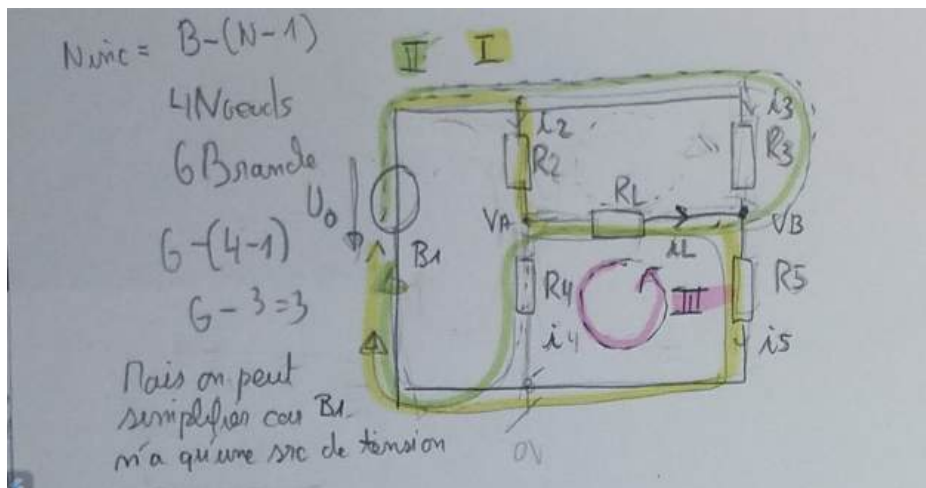
$$U_a = 0.8V$$

$$U_b = 0.6V$$

Je pense que c'est une des méthodes les moins couteuse en termes de calculs faits à la main.

14.9 Méthode des Mailles : la somme des tensions le long d'un circuit fermé est toujours nulle

On peut aussi décider de chercher les courants. En utilisant la méthode standard des "mailles" on trouve qu'il faut un système 3x3. Je l'ai résolu de manière à trouver i_2, i_3 et i_L . Mais comme ce circuit est un peu spécial (il a une branche (B1) qui n'a qu'une source, sans résistance, $R=0$)³⁰ On peut le simplifier en un système de 2 équations à 2 inconnues.



Si on fait des simplifications comme ici avec $R=0$, il faut vérifier que les réponses soient cohérentes (par exemple qu'il n'y ait pas de courant infini).

$N_{mailles} = B - (N - 1)$
 4 Nœuds
 6 Branches
 $6 - (4 - 1)$
 $G - 3 = 3$
 Mais on peut simplifier car B1 n'a qu'une src de tension

$N_{mailles} = B - (N - 1)$
 4 Nœuds
 6 Branches
 $6 - (4 - 1)$
 $G - 3 = 3$
 Mais on peut simplifier car B1 n'a qu'une src de tension

$i_2 = \frac{U_0 - R_2 i_L}{R_2 + R_L}$
 $V_A = U_0 - i_2 R_2$ $V_B = U_0 - i_3 R_3$
 $i_2 = \frac{V_B - V_A}{R_L} = \frac{U_0 - i_3 R_3 - (U_0 - i_2 R_2)}{R_L}$
 $i_2 R_L = -i_3 R_3 + i_2 R_2$
 $i_2 (R_L - R_2) = -i_3 R_3$
 $i_2 = \frac{R_3 i_3}{R_2 - R_L}$

$i_3 R_3 + i_2 R_2 - i_2 R_L = U_0$
 $i_3 R_3 + i_2 (R_2 - R_L) = U_0$

$i_2 (R_2 - R_L) = -i_3 R_3$
 $i_2 = \frac{R_3 i_3}{R_2 - R_L}$

$i_3 R_3 + \frac{R_3 i_3}{R_2 - R_L} (R_2 - R_L) = U_0$
 $i_3 R_3 \left(1 + \frac{R_2 - R_L}{R_2 - R_L} \right) = U_0$
 $i_3 R_3 \left(\frac{R_2 - R_L + R_2 - R_L}{R_2 - R_L} \right) = U_0$
 $i_3 R_3 \left(\frac{2R_2 - 2R_L}{R_2 - R_L} \right) = U_0$
 $i_3 R_3 \left(\frac{2(R_2 - R_L)}{R_2 - R_L} \right) = U_0$
 $i_3 R_3 \cdot 2 = U_0$
 $i_3 = \frac{U_0}{2R_3}$

$i_2 = \frac{R_3 \cdot \frac{U_0}{2R_3}}{R_2 - R_L} = \frac{U_0}{2(R_2 - R_L)}$

$i_L = \frac{U_0 - i_2 R_2}{R_2 + R_L} = \frac{U_0 - \frac{U_0 R_2}{2(R_2 - R_L)}}{R_2 + R_L}$
 $i_L = \frac{U_0 \left(\frac{2(R_2 - R_L) - R_2}{2(R_2 - R_L)} \right)}{R_2 + R_L} = \frac{U_0 (R_2 - 2R_L)}{2(R_2 - R_L)(R_2 + R_L)}$

$i_2 = \frac{U_0}{2(R_2 - R_L)}$
 $i_L = \frac{U_0 (R_2 - 2R_L)}{2(R_2 - R_L)(R_2 + R_L)}$

$i_3 = \frac{U_0}{2R_3}$

$i_4 = i_2 - i_3 = \frac{U_0}{2} \left(\frac{1}{R_2 - R_L} - \frac{1}{R_3} \right)$

$i_5 = i_3 - i_L = \frac{U_0}{2} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{R_2 - 2R_L}{(R_2 - R_L)(R_2 + R_L)} \right)$

³⁰En pratique ce n'est pas possible car cela correspondrait à une source de tension ayant une puissance infinie. Il y a donc toujours une petite résistance en série, mais le fait de la négliger permet de réduire le système à 2 équations à 2 inconnues. J'ai commencé à résoudre sous cette forme mais je n'ai pas terminé car il y a encore quelques erreurs de calculs dans le petit paragraphe de gauche ci-dessous. Par contre la matrice 3x3 de droite est correcte. On voit que c'est un petit peu plus laborieux de travailler avec les mailles, en tout cas pour ce problème en particulier. C'est pour ça qu'il faut essayer de trouver la méthode qui demande le moins de calcul en fonction du type de circuits. Sinon les deux méthodes (mailles et noeuds) sont équivalentes pour résoudre tous les circuits.

14.10 Résolution de la matrice obtenue par la méthode des mailles

A nouveau on utilise le calculateur en ligne matrixcalc.org :

The screenshot shows the matrixcalc.org interface. At the top, a 3x3 system of linear equations is entered:

$$\begin{cases} 0.2x_1 + 0.1x_2 + 0.5x_3 = 1 \\ 0.2x_1 + 0.8x_2 - 0.2x_3 = 1 \\ -0.2x_1 + 0.8x_2 - 0.4x_3 = 0 \end{cases}$$

Below the equations, there are buttons for 'Cells', a share icon, '+', and '-'. A dropdown menu is set to 'Solve using the inverse matrix' and a 'Solve' button is visible. The 'Display decimals' checkbox is checked, and the 'number of fraction digits' is set to 6.

The solution is displayed under the heading 'Solution by Inverse Matrix Method':

$$A \cdot X = B$$

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 & 0,5 \\ 0,2 & 0,8 & -0,2 \\ -0,2 & 0,8 & -0,4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1,142857 & 3,142857 & -3 \\ 0,857143 & 0,142857 & 1 \\ 2,285714 & -1,285714 & 1 \end{pmatrix}$$

A link for 'Details (Montante's method (Bareiss algorithm))' is shown. Below it, the final solution is calculated:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -1,142857 & 3,142857 & -3 \\ 0,857143 & 0,142857 & 1 \\ 2,285714 & -1,285714 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

C'est un exemple de la résolution du système 3x3. Cette fois les X_1 , X_2 et X_3 sont les courants à chercher et on voit que l'on retrouve 2A, 1A et 1A.

The screenshot shows the matrixcalc.org interface for a 2x2 system. The equations entered are:

$$\begin{cases} -0.02x_1 + 0.12x_2 = 0.2 \\ 0.26x_1 - 0.16x_2 = 0.2 \end{cases}$$

The 'Solve using the inverse matrix' dropdown is selected, and the 'Solve' button is visible. 'Display decimals' is checked, and 'number of fraction digits' is set to 10.

The solution is displayed under the heading 'Solution by Inverse Matrix Method':

$$A \cdot X = B$$

$$A = \begin{pmatrix} -0,02 & 0,12 \\ 0,26 & -0,16 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5,7142857143 & 4,2857142857 \\ 9,2857142857 & 0,7142857143 \end{pmatrix}$$

A link for 'Details' is shown. Below it, the final solution is calculated:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 5,7142857143 & 4,2857142857 \\ 9,2857142857 & 0,7142857143 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pour trouver V_a et V_b il faut encore faire quelques petits calculs à la mains.

14.11 Calculs à la main avec la méthode des Mailles

14.11.1 Rappel méthode de Cramer :

Si $ad - bc \neq 0$, le système

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

a pour unique solution :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}.$$

Système d'équations de départ pour appliquer la méthode. Ne pas griller les étapes !

$$\begin{bmatrix} -R_2R_5 & [R_L(R_3 + R_5) + R_3R_5] \\ [R_L(R_2 + R_4) + R_2R_4] & -R_3R_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_LU_0 \\ R_LU_0 \end{bmatrix}$$

Dans l'équation ci-dessous on vérifiera la substitution des colonnes du numérateur,

$$I_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} R_LU_0 & [R_L(R_3 + R_5) + R_3R_5] \\ R_LU_0 & -R_3R_4 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} -R_2R_5 & [R_L(R_3 + R_5) + R_3R_5] \\ [R_L(R_2 + R_4) + R_2R_4] & -R_3R_4 \end{bmatrix}}$$

Dans l'équation de I_2 on vérifiera que l'on a la dimension d'un courant $[\frac{V\Omega^3}{\Omega^4}]$ et que les signes provenant des calculs des déterminants sont corrects (Note : Le Dét. du Dénom. est nég. !).

$$I_2 = -U_0 \frac{R_LR_3R_4 + R_L[R_L(R_3 + R_5) + R_3R_5]}{R_2R_3R_4R_5 - [R_L(R_3 + R_5) + R_3R_5][R_L(R_2 + R_4) + R_2R_4]}$$

$$V_A = U_0 - R_2I_2 = U_0 + R_2U_0 \frac{R_LR_3R_4 + R_L[R_L(R_3 + R_5) + R_3R_5]}{R_2R_3R_4R_5 - [R_L(R_3 + R_5) + R_3R_5][R_L(R_2 + R_4) + R_2R_4]}$$

$$I_3 = \frac{\det \begin{bmatrix} -R_2R_5 & R_LU_0 \\ [R_L(R_2 + R_4) + R_2R_4] & R_LU_0 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} -R_2R_5 & [R_L(R_3 + R_5) + R_3R_5] \\ [R_L(R_2 + R_4) + R_2R_4] & -R_3R_4 \end{bmatrix}}$$

$$I_3 = -U_0 \frac{R_LR_2R_5 + R_L[R_L(R_2 + R_4) + R_2R_4]}{R_2R_3R_4R_5 - [R_L(R_3 + R_5) + R_3R_5][R_L(R_2 + R_4) + R_2R_4]}$$

$$V_B = U_0 - R_3I_3 = U_0 + R_3U_0 \frac{R_LR_2R_5 + R_L[R_L(R_2 + R_4) + R_2R_4]}{R_2R_3R_4R_5 - [R_L(R_3 + R_5) + R_3R_5][R_L(R_2 + R_4) + R_2R_4]}$$

$$V_{A-B} = U_0R_L \frac{R_2(R_3R_4 + [R_L(R_3 + R_5) + R_3R_5]) - R_3(R_2R_5 + [R_L(R_2 + R_4) + R_2R_4])}{R_2R_3R_4R_5 - [R_L(R_3 + R_5) + R_3R_5][R_L(R_2 + R_4) + R_2R_4]}$$

$$V_{A-B} = U_0 \frac{R_L^2(R_2R_5 - R_3R_4)}{R_2R_3R_4R_5 - [R_L(R_3 + R_5) + R_3R_5][R_L(R_2 + R_4) + R_2R_4]}$$

ou si on simplifie encore le dénominateur,

$$V_{A-B} = U_0 \frac{R_L^2(R_3R_4 - R_2R_5)}{R_L(R_3 + R_5)(R_2 + R_4) + R_3R_5(R_2 + R_4) + R_2R_4(R_3 + R_5)}$$

14.12 Comparaison des réponses sous formes de R ou de G

14.12.1 Réponses sous formes de R

Comme on l'a vu à la page précédente,

$$V_{A-B} = U_0 \frac{R_L^2 (R_3 R_4 - R_2 R_5)}{R_L (R_3 + R_5) (R_2 + R_4) + R_3 R_5 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_3 + R_5)}$$

Condition d'équilibre du pont $I_L = 0$,

$$\begin{aligned} nR_2 &= R_4 \\ R_5 &= nR_3 \\ n\frac{R_2}{R_4} &= n\frac{R_3}{R_5} \end{aligned}$$

Attention avec la formule ci-dessous, car on ne voit pas quelles sont les résistances les plus grandes et ça a une importance. Si la plus grande du pont à gauche est en bas, il doit en être de même pour celle de droite !

$$nR_2 R_5 = nR_3 R_4$$

14.12.2 Réponses sous formes de G

Voici ci-dessous la même formule en version "conductance" (dénominateur réarrangé). Laquelle préférez-vous ? Personnellement dans ce cas je préfère la version avec les conductances alors que d'habitude j'utilise les résistances.

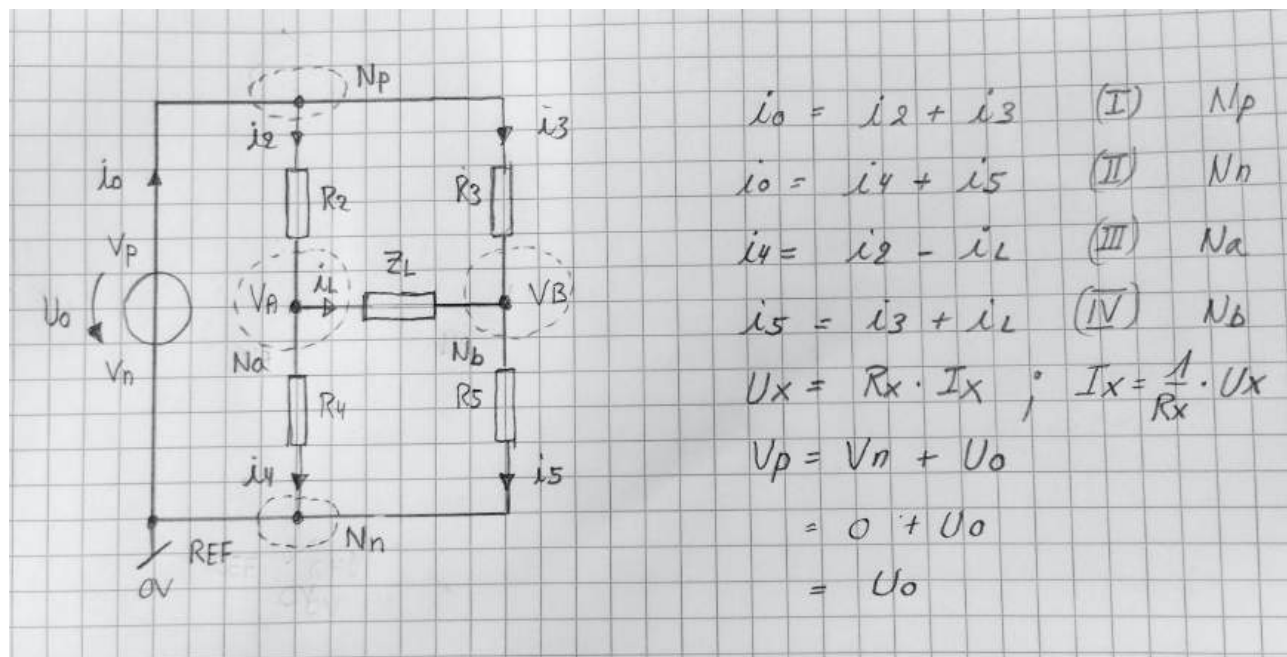
$$V_{A-B} = U_0 \frac{G_2 G_5 - G_3 G_4}{G_L (G_2 + G_3 + G_4 + G_5) + (G_2 + G_4) (G_3 + G_5)}$$

Condition d'équilibre du pont $I_L = 0$,

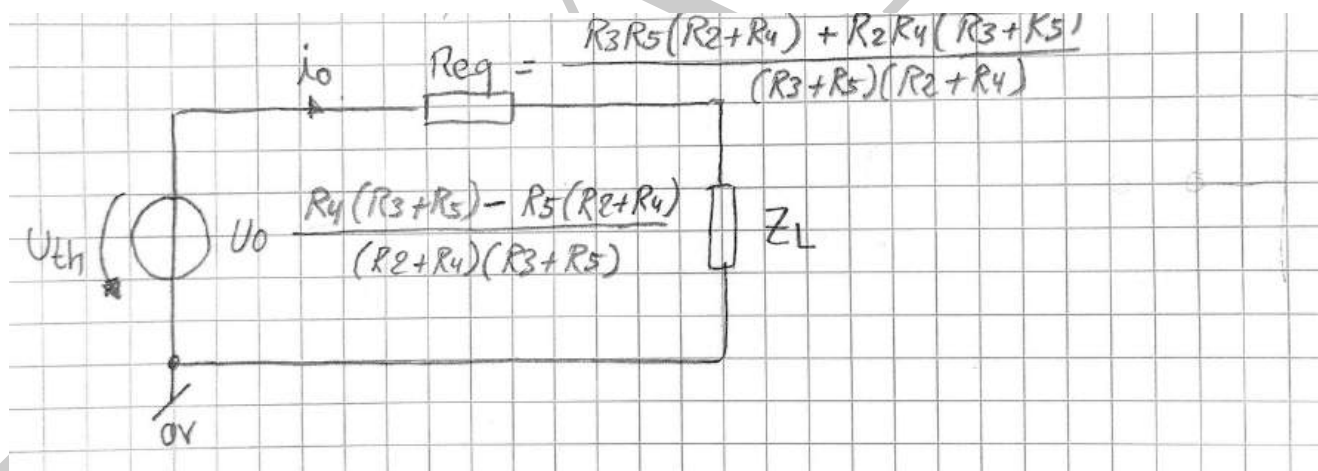
- Pont en équilibre, $U_L = 0$ et $i_L = 0$: $G_x = \dots$
- Pont en court-circuit $U_L = 0$ $G_x = \dots$
- Pont ouvert $I_L = 0$ $G_x = \dots$

14.13 Solution avec une astuce pour simplifier, le théorème de Thévenin

En utilisant le théorème de Thévenin on peut simplifier au maximum les calculs en transformant le circuit, c'est une sorte de changement de variables. On peut prouver que le circuit ci-dessous,



est équivalent au petit circuit de l'image suivante, ou on a remplacé les quatre résistances par une seule que l'on appelle R_{eq} (résistance équivalente de Thévenin) et une source de tension U_{th} (Tension de Thévenin),³¹



La résistance Z_L ne change pas.

Une fois qu'on a le schéma on peut facilement calculer la tension ou le courant dans Z_L ,

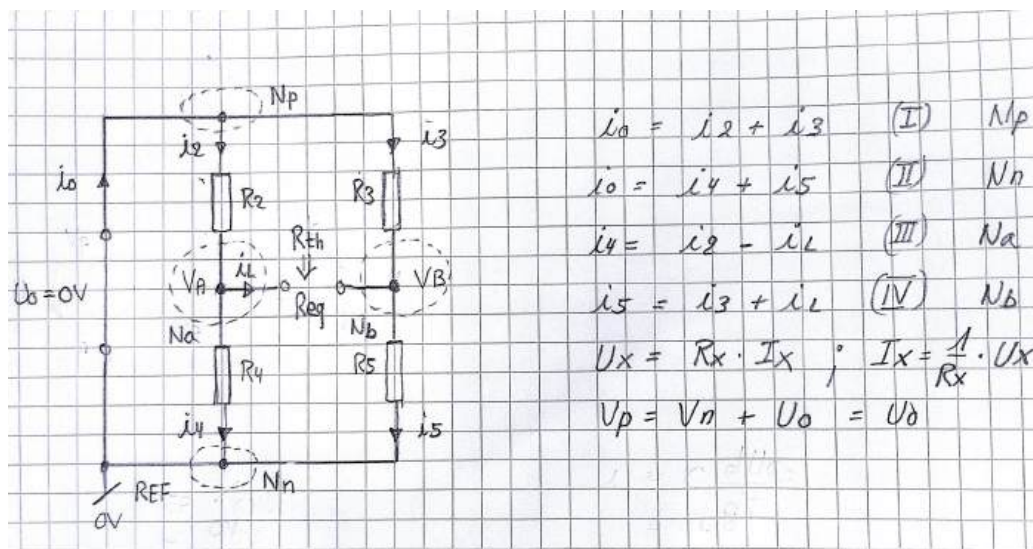
$$I_L = \frac{U_{th}}{Z_L + R_{eq}}$$

A la page suivante on fait les calculs à la main. C'est plus simple, à aucun moment on n'a besoin de poser de système d'équations à deux inconnues, mais ça fait tout de même pas mal de manipulations algébriques.

³¹Pour cela il faut calculer U_{th} qui est la tension U_{A-B} en l'absence de Z_L et R_{eq} qui est la résistance "vue" depuis les bornes de U_A et U_B , toujours en l'absence de Z_L lorsque $U_0 = 0$.

14.14 Calcul des U_{th} et R_{th}

Quelle est la résistance vue depuis les bornes V_a et V_b si on met en court-circuit U_0 ?



Si on redessine le schéma on voit que $R_3//R_5$ sont en série avec $R_2//R_4$ donc,

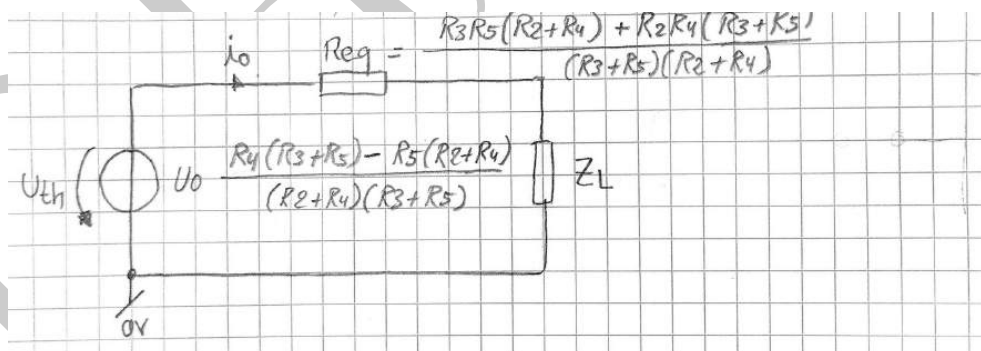
$$R_{eq} = \frac{R_3 R_5}{R_3 + R_5} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4} = \frac{R_3 R_5 (R_2 + R_4) + R_2 R_4 (R_3 + R_5)}{(R_3 + R_5)(R_2 + R_4)}$$

$$R_{eq} = \frac{0.2 \cdot 0.2(0.1 + 0.8) + 0.1 \cdot 0.8(0.2 + 0.2)}{(0.2 + 0.2)(0.1 + 0.8)} = \frac{17}{90} [\Omega]$$

Quelle serait la tension entre V_a et V_b si on remettait une source U_0 ? Ce ne sont que deux simples diviseurs de tension en parallèle,

$$U_{th} = V_a - V_b = U_0 \left(\frac{R_4}{R_4 + R_2} - \frac{R_5}{R_3 + R_5} \right) = U_0 \frac{R_4(R_3 + R_5) - R_5(R_2 + R_4)}{(R_4 + R_2)(R_3 + R_5)}$$

$$U_{th} = 1,0 \frac{0.8(0.2 + 0.2) - 0.2(0.1 + 0.8)}{(0.1 + 0.8)(0.2 + 0.2)} = \frac{7}{18} [V]$$



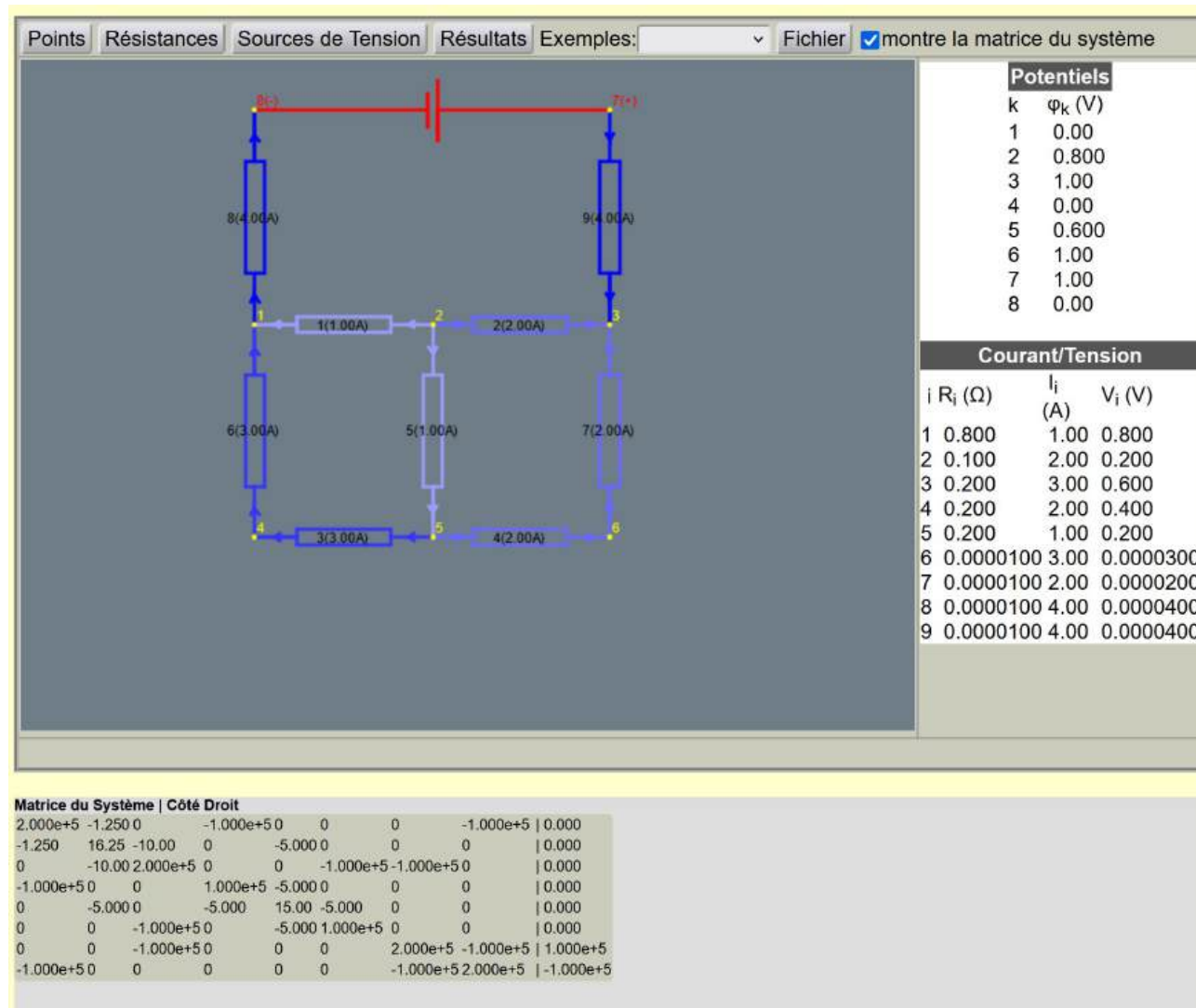
Calculons le courant I_L et vérifions si il vaut aussi 1A :

$$I_L = \frac{U_{th}}{Z + R_{eq}} = \frac{\frac{7}{18}}{\frac{2}{10} + \frac{17}{90}} = \frac{\frac{35}{90}}{\frac{18}{90} + \frac{17}{90}} = 1A$$

$$U_L = I_L \cdot Z_L = 0.2V$$

14.15 Solution pour bien s'entendre avec son patron (Faire le plus vite possible)

On trouve plein de petites applications online, écrites en JS ou autres langages de programmation. Il n'y a qu'à dessiner et laisser faire les calculs par la machine. On peut aussi installer sur son ordi des logiciels professionnels mais ils sont souvent payants et nécessitent un certain temps d'apprentissage.



On voit qu'il a trouvé comme nous les potentiels aux points 5 (0.6V) et au point 2 (0.8V). Tout est juste !

Autant dire que l'on a la réponse en quelques minutes. Avec ce programme on devait introduire les valeurs en Ohm. Donc on a juste inversé les valeurs des conductances. Attention parfois ce genre de logiciel n'aime pas que l'on mette une résistance de 0 Ohm pour un fil et reporte une erreur. Il vaut mieux mettre une valeur négligeable comme $R_{fil} = 0.00001\Omega$!

Site : https://valdivia.staff.jade-hs.de/knotenpotentialverfahren_fr.html

Et plein d'autres simulateurs gratuits ici : https://valdivia.staff.jade-hs.de/js_fr.html

Voir doc cours théories dans rép dropbox "résumé-circuits-systèmes-kirchoff"

15 Les équations du 2ème degré et les paraboles

15.1 Fonction carré et racine carrée

Ce qui suit est très important. La fonction élévation au carré est facile à comprendre car il suffit de multiplier le nombre par lui-même $y = x^2 = x \cdot x$, et en effet pour chaque x il y a une seule image y et c'est donc une fonction. Mais si je demande : quel nombre faut-il élever au carré pour trouver y , il y a deux réponses: x et $-x$ et on ne peut plus parler de fonction (dans certains systèmes algébriques comme l'arithmétique modulaire il peut même y avoir trois voir une infinité de réponses, mais c'est une autre histoire et d'ailleurs c'est très rarement utilisé en mathématiques de base).

Donc on oublie le $-x$ et on dit que la fonction racine carrée est la fonction qui permet de répondre à la question suivante : quel est le nombre positif x qui élevé au carré donne y ?

15.2 Fonction réciproques, propriété et technique de visualisation

Pour trouver la réciproque à partir d'une fonction d'origine, ici à partir de la parabole $y = x^2$, on la fait tourner de 90° dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, puis on la bascule de 180° autour de l'axe des y . On ne garde que la branche dans R^+ . Une fonction réciproque est toujours symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$. On peut la dessiner à partir de cette droite en reportant les points perpendiculairement.

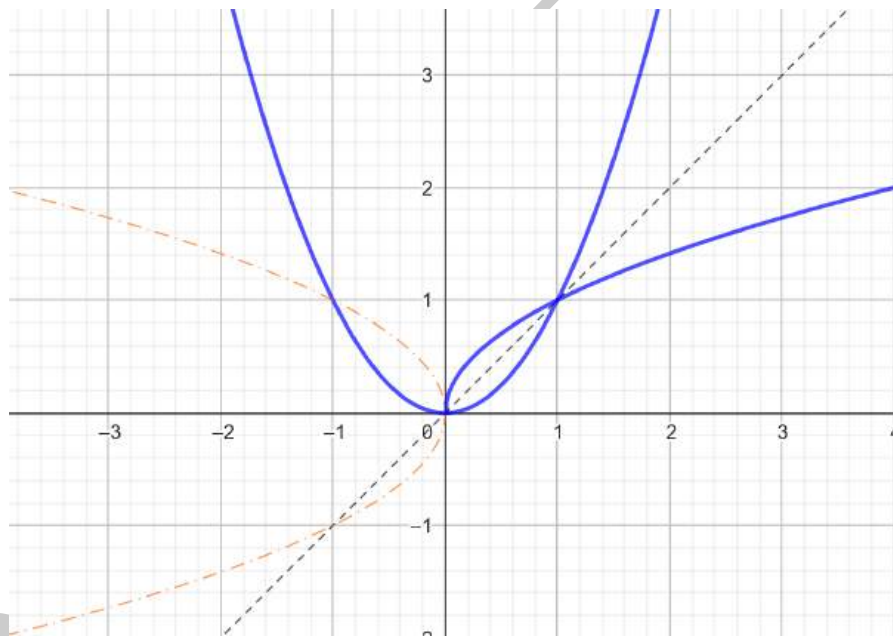


Figure 37: Visualiser la fonction réciproque

Ou alors, la définition sans doute préférée des profs, **la racine carrée d'un nombre N est le nombre positif n qui lorsqu'il est multiplié par lui-même donne N** . Ce nombre x est la racine carrée de y que l'on note \sqrt{y} . D'ailleurs dans la formule pour trouver les 2 racines d'un polynôme du 2ème degré on voit bien qu'il y a le signe \pm devant la racine, cela veut bien dire qu'elle n'a qu'une seule valeur :

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Il ne faut pas confondre la fonction racine carrée que l'on vient de définir, avec les solutions (que l'on appelle aussi racines) de l'équation du deuxième degré, par exemple $x^2 - 4 = 0$. Dans cette équation les solutions sont $S = (2, -2)$ que l'on écrit aussi $S = \pm\sqrt{4} = \pm$. En effet, les solutions sont \pm la racine carrée de 4, la racine carrée de 4 étant toujours positive. Montrer le carré et sa réciproque et expliquer la courbe de l'équation $x = y^2$ avec l'axe des x horizontal.

15.3 Pour aller plus loin : Définition du nombre imaginaire i (Ensemble C)

Si on travaille qu'avec des nombre Réels on a pas besoin de tenir compte de ce qui suit. C'est ce qu'on fait lorsqu'on étudie les solutions des équations du 2ème degré pour la première fois et on dit qu'il n'y a pas de solutions (dans les Réels) si le déterminant est plus petit que zéro. Lorsqu'on résout une équation écrite avec des nombres rationnels, on ne trouve pas toujours $x=Q$, un nombre qui fait partie des rationnels et que l'on peut écrire avec un nombre fini de chiffres ou qui se répètent après la virgule (Toute fraction a une période). On définit à ce moment une nouvelle classe de nombre que l'on nomme irrationnels qui font parties des nombres réels. C'est le cas de la racine carrée de 2 ou de Pi qui ont une infinité de décimales différentes après la virgule.

De la même façon, avec des équations utilisant des nombres purement réels on peut trouver des réponses du genre $S = \sqrt{-1}$, nombres qui n'existent pas dans l'ensemble de départ, comme la racine de 2 dans l'exemple précédant (aucune fraction n'est égale à la racine de 2). On dit que c'est un nombre imaginaire et par ce moyen on définit l'ensemble ces nombres complexes.

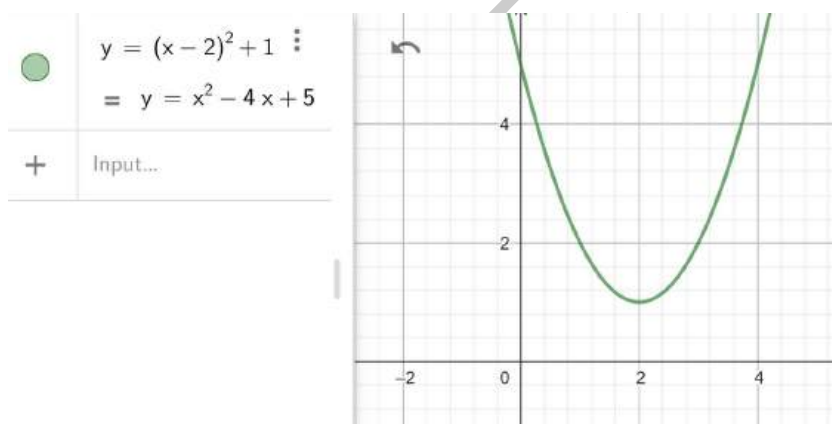


Figure 38: Pas de racines réelles

Par définition les racines sont les endroits où la fonction vaut zéro. On voit bien que dans la figure ci-dessus il n'y en a pas. C'est parce que sur cette figure on affiche pas les nombres complexes. Il y a pourtant bel et bien deux nombres complexes pour lesquels y vaut zéro.

15.4 Pour aller plus loin : Le plan complexe et les nombres imaginaires

Ces racines sont visibles dans le plan complexe affiché ci-dessous. On voit deux ronds, ce qui signifie qu'à ces deux endroits la fonction s'annule.

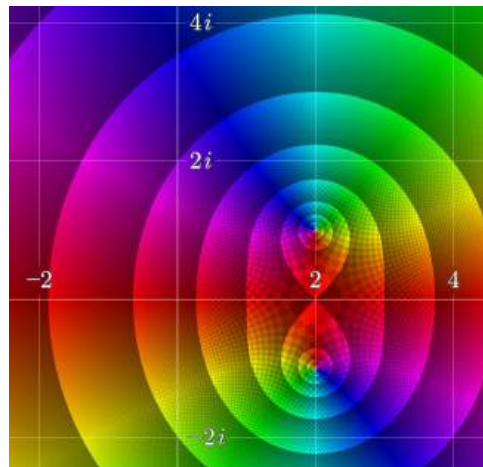


Figure 39: Racines complexe

Une des solutions est :

$$x = i + 2$$

En effet

$$\begin{aligned} y &= (x - 2)^2 + 1 = (i + 2 - 2)^2 + 1 \\ &= (i^2) + 1 = -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

Ce qu'on voit c'est que cette racine ne touche pas l'axe horizontal qui est l'axe des nombre Réels.

C'est un processus un peut similaire qu'avec les irrationnels. C'est peut-être un peu abstrait, mais la définition du zéro, des nombres négatifs et des nombres irrationnels l'étaient également lorsqu'ils ont été introduits (-5 moutons n'avait aucun sens pour un berger).

Une fois les complexes introduits, on n'a plus besoin de définir de nouveaux nombres ou de nouveaux symboles. Toute solution de tout problème algébrique peut s'écrire au pire en terme de nombres complexes. La notation $\sqrt{-1}$ a été abandonnée au profit de i car cela menait à des contradictions.

La définition est : $i^2 = -1$, donc on imagine un nombre dont le carré vaut -1. Il vérifie aussi l'égalité $(-i)^2 = -1$. Il n'y a aucune manière de distinguer i de $-i$ dans la définition, mais cette indétermination ne pose aucun problème. Ce nombre est très utile également en mathématique appliquée, en électricité par exemple, car il permet de faciliter les calculs intermédiaires qui peuvent être des valeurs imaginaires, mais les résultat finaux sont toujours réels.

15.5 Equations du second degré et polynômes

La forme suivante s'appelle la forme générale et les constantes a , b et c sont des nombres complexes (Avec éventuellement des nombres algébriques, racines etc.),

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

que l'on peut toujours mettre sous la forme factorisée suivante :

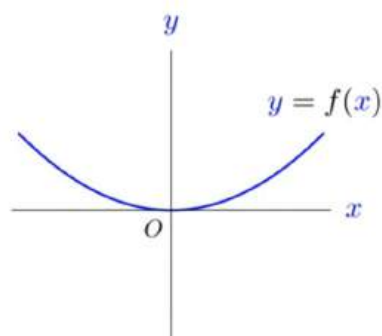
$$y = f(x) = a(x - r_1)(x - r_2) = 0$$

où l'on voit les racines et que l'on peut aussi écrire :

$$y = f(x) = a[x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2] = 0$$

Interprétation des paramètres a , b et c :

2. Quadratic graph



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

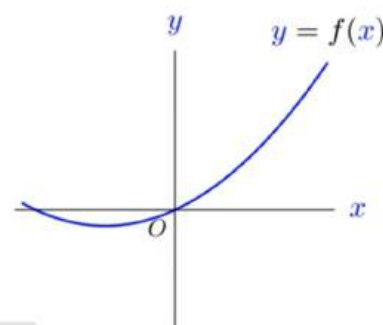
$$a = 1.0$$

$$b = 0.0$$

$$c = 0.0$$

a : ($b=0, c=0$) centrée à l'origine (racine double $x=0$), ouverture vers le haut si positif, vers le bas si négatif et ligne horizontale superposée à l'axe des x si nul.

2. Quadratic graph



$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$a = 1.0$$

$$b = 2.0$$

$$c = 0.0$$

b : ($a=1, c=0$) déformation vers la gauche et vers le bas avec apparition d'un 2ème zéro (1er zéro toujours en $x=0$) dans les x négatifs si b est positif. Ça ressemble un peu au décalage sans déplacement vers le bas $y = f(x + k)$ qui se fait vers la gauche si k est positif. Sinon déplacement vers la droite et vers le haut avec 2ème racine.

c : offset vertical

Dans tous les cas : $f(x)$ est symétrique par rapport à l'axe vertical qui passe par son sommet de coordonnées : $Sx = -\frac{b}{2a}$ et $Sy = f(-\frac{b}{2a}) = -\frac{\Delta}{4a}$. Voir plus loin dans le chapitre.

Enfin il y a la forme canonique qui met en évidence le sommet et le paramètre a :

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

15.6 Trouver l'équation de la fonction de la parabole

Si on connaît le sommet P_0 et a ou les deux racines on utilise directement la forme canonique ou la forme factorisée. Si on a 3 points P_1 , P_2 et P_3 on met sous la forme d'un système de trois équations linéaires à 3 inconnues où on cherche a , b et c :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= y \\ a(x_1)^2 + b(x_1) + c &= y_1 \\ a(x_2)^2 + b(x_2) + c &= y_2 \\ a(x_3)^2 + b(x_3) + c &= y_3 \end{aligned}$$

Plusieurs solutions, Bésiers ?

15.7 Trouver l'équation de la fonction biquadratique $y = ax^4 + bx^2$

Quadratique réduite, quadratique par substitution, biquadratique ?

Voir dans anciens exemples exercices et vidéo fonctions spéciale avec théorie des nombres pour savoir si il y a plusieurs solutions.

15.8 Trouver l'équation d'une exponentielle de base connue passant par deux points

A nouveau on s'en sort avec un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

$$\begin{aligned} y_1 &= ae^{x_1} + b \\ y_2 &= ae^{x_2} + b \end{aligned}$$

15.9 Trouver l'équation d'une exponentielle décalée de base connue passant par deux points

$$\begin{aligned} y &= e^{x-x_0} + b \\ y &= e^x e^{-x_0} + b \\ y &= e^x a + b \end{aligned}$$

Rappel : Un décalage revient à multiplier par a la valeur à l'intersection (1) avec axe y :

$$e^{x-x_0}$$

$$x_0 = \ln(a)$$

etc.

A nouveau on s'en sort avec un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

$$\begin{aligned} y_1 &= ae^{x_1} + b \\ y_2 &= ae^{x_2} + b \end{aligned}$$

Essai avec (1,2) et (3,3) donne $y = 0.057e^x + 1.84$

15.10 Autres combinaisons de fonctions non linéaires qui nécessitent un système d'équations linéaires pour la solution

$$\begin{aligned} y_1 &= a\cos(x_1) + b(x_1)^2 + c \\ y_2 &= a\cos(x_2) + b(x_2)^2 + c \\ y_3 &= a\cos(x_3) + b(x_3)^2 + c \end{aligned}$$

15.11 Trouver l'équation d'une exponentielle passant par 3 points

Problème :

$$ab^x + c = y$$

15.12 Exercice : Calculer le taux d'augmentation de la surface d'une sphère en expansion sachant que le rayon grandit à 3 mètres par seconde**15.13 Exercice : Désintégration radioactive****15.14 Exercice : Calcul d'extremum sans dérivées, prix pour un chiffre d'affaire optimal, calcul et analyse sommet parabole****15.15 Exercice : Distance d'une droite par rapport à un point****15.16 Exercice : Faire tourner les axes d'une parabole, changement de référentiel**

15.17 Equations Diophantiennes ? dans \mathbb{Z}^2 ?

Tout vérifier au niveau des définitions, des explications et de la terminologie ! (Voir notes du 19.11.23) On cherche les solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation :

$$y^2 - x^2 = 16$$

Il y a deux inconnues et une équation, donc en principe cela nous donne une infinité de solutions, comme dans l'équation de la droite $y = ax + b$, qui admet une infinité de couples de points (x_0, y_0) satisfaisant la relation.

Sauf qu'ici on impose que les solutions soient des entiers relatifs (\mathbb{Z}), ce qui change la donne ! On doit donc chercher des couples de nombres entiers relatifs, mais heureusement il y a un truc à ne surtout pas rater, la factorisation :

$$\begin{aligned} y^2 - x^2 &= 16 \\ (y - x)(y + x) &= 16 \end{aligned}$$

équivalent à deux nombres N_1 et N_2 :

$$N_1 \cdot N_2 = 16$$

Alors ça ressemble beaucoup à la méthode connue pour trouver les zéros d'une équation à une variable :

$$\begin{aligned} x^2 - 16 &= 0 \\ (x - 4)(x + 4) &= 0 \end{aligned}$$

Et on pourrait dire "factoriser pour mieux régner" à la place de "diviser pour mieux régner", mais ces deux expressions ne sont-elles pas un peu synonymes dans ce genre de situations en mathématiques (sujet de réflexion).

Sous cette forme il nous sera facile de lister tous les couples de nombres entiers relatifs (paires non ordonnées) dont le produit donne 16, en partant de 1 et en s'arrêtant à un module équivalent à la racine carrée de 16 (devinez pourquoi) **Pourquoi pas avec des \mathbb{Q} ?** :

$$\begin{aligned} (1, 16) \\ (-1, -16) \\ (2, 8) \\ (-2, -8) \\ (4, 4) \\ (-4, -4) \end{aligned}$$

Ensuite on cherche pour chaque couple quels seraient les couples de nombres dont la différence et la somme donnerait respectivement le premier et le deuxième nombre. Par exemple si on prend :

$$(1, 16)$$

on pourrait chercher :

$$\begin{aligned} N_1 - N_2 &= 1 \\ N_1 + N_2 &= 16 \end{aligned}$$

On pourrait se dire $N_1 = 8$ et $N_2 = 7$ donc,

$$N_1 - N_2 = 1$$

ce qui est ok, mais,

$$N_2 + N_1 = 15$$

ce qui fout tout en l'air. En fait il n'y a pas de solutions dans Z pour ce système de deux équations à deux inconnues.

En fait nous ne trouverons rien pour les couples du genre :

$$(1, 16); (4, 4)$$

Par contre pour (2,8) nous trouverons, en faisant la liste exhaustive et fastidieuse :

$$(5 - 3)(5 + 3) = 16$$

$$(-5 - (-3))(-5 + (-3)) = 16$$

$$(-5 - 3)(-5 - (-3)) = 16$$

$$(5 - (-3))(5 - (-3)) = 16$$

Ce qui donne la liste de solutions :

$$S = [(5, 3)(-5, 3)(5, -3)(-5, -3)]$$

Combien y a-t-il de solutions dans Q ? :

Note : Tracer la fonction $Z = y^2 - x^2 - 16 = 0$

Voir autres Diophantiennes et Théorie sur wiki [Peut-on prédire le nombre de solutions de ce genre d'équations pour des degrés quelconques ?](#) :

15.18 Système d'équations déroutants mais pas compliqués

On a déjà vu des systèmes de trois équations linéaires à trois inconnues écrits sous des formes inattendues tel que $x + y = y - z + 2 = x + y - z - 6$. Dans ces cas il s'agissait de systèmes d'équations 'déguisés' et finalement pas plus difficile à résoudre que d'habitude (refaire 3 équations à 3 inconnues à partie de la ligne).

Dans ce sens le genre de problème qui suit :

$$x + y = xyz$$

$$y + z = xyz$$

$$z + x = xyz$$

il ne faudrait surtout pas perdre d'information en réarrangeant les termes des équations. Ainsi on peut très bien soustraire chaque couple d'équation ce qui nous donnera l'égalité :

$$x = y = z$$

Mais il ne faudra pas oublier le terme xyz et en tenir compte au moyen d'une des trois équations du début :

$$x + y = xyz$$

$$x + x = x^3$$

$$2x = x^3$$

factorisons pour mieux règner :

$$2x - x^3 = 0$$

$$x(2 - x^2) = 0$$

$$x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

Donc

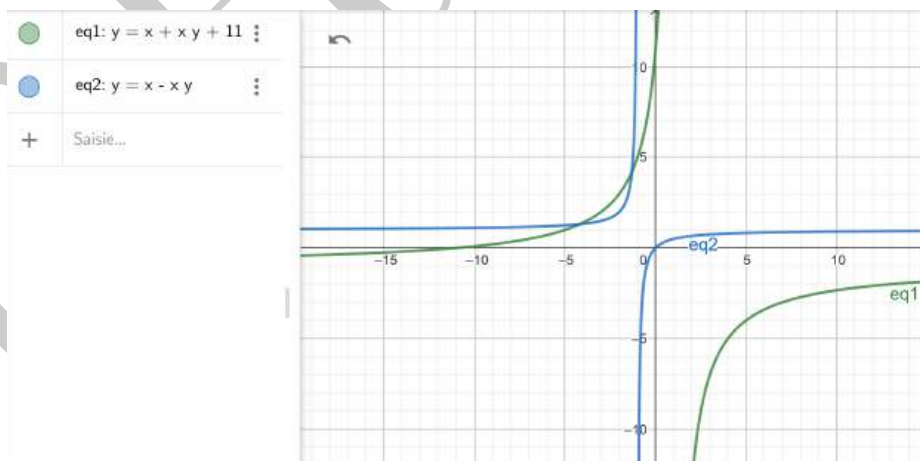
$$S = [0, +\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$$

15.18.1 Qu'est ce que ça donne en 2D ?

$$x - y - 11 = xy$$

$$x - y = xy$$

Le terme xy déforme complètement les deux droites que l'on aurait dans un systèmes linéaires.



15.19 Equation d'une parabole dans le plan :

15.20 Choses à savoir sur la Paraboles, caractéristiques

- Soit la fonction $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ qui est une parabole convexe (ouverte vers le haut) si $a > 0$. 'c' est l'intersection avec l'axe des y lorsque $x = 0$.
- La parabole a toujours un axe de symétrie qui passe par son sommet et qui coupe l'axe des x en $S_x = -\frac{b}{2a}$. Pour trouver S_y du sommet il suffit d'évaluer la fonction $f(x)$ en $x = S_x$. Il se situe entre les deux racines (zéros).
- Si cette parabole convexe passe en dessous de l'axe des x, elle a deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2 , et on peut mettre la fonction sous la forme suivante : $y = f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$.

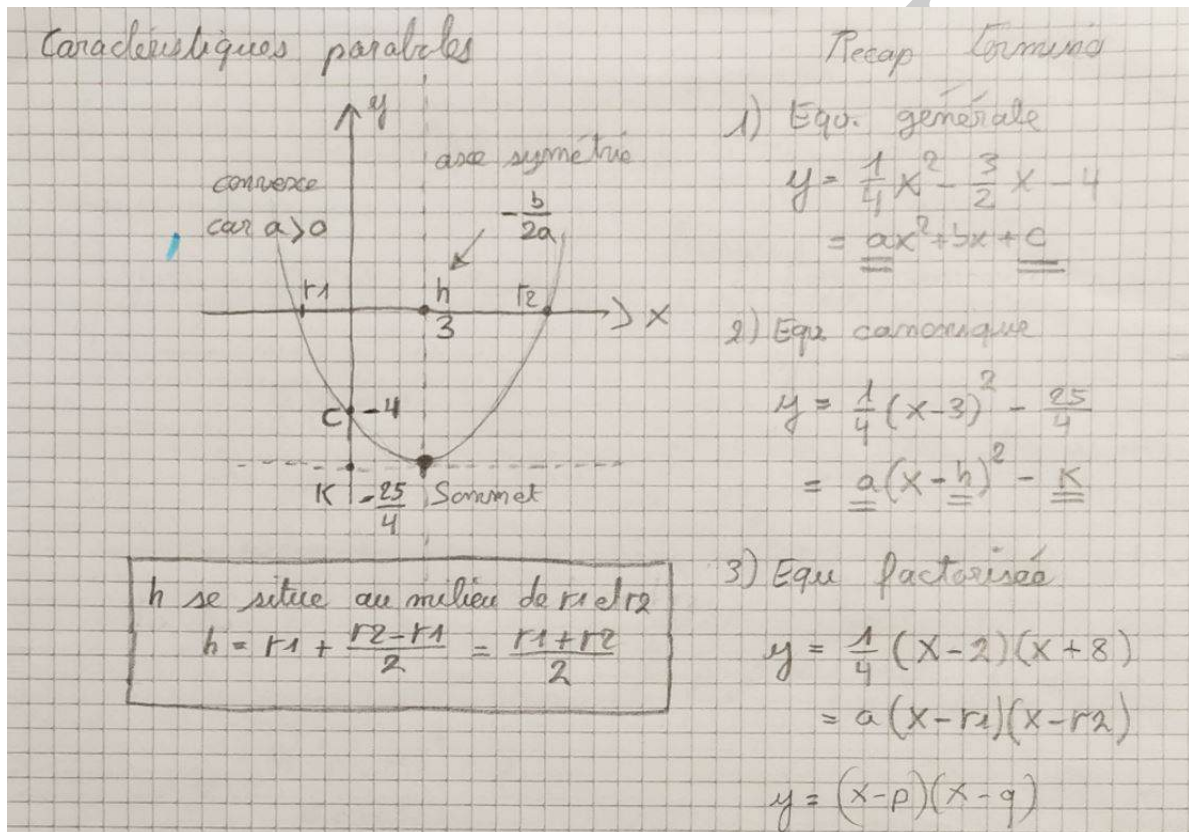


Figure 40: Caractéristiques Parabole

Pour chercher les zéros on pose

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

ce qui revient au même que

$$g(x) = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Attention, il s'agit bien de deux paraboles différentes, mais elles ont le même axe de symétrie en $S_x = -\frac{b}{2a}$ et les mêmes zéros. On peut mettre cette dernière équation sous la forme

$$(x - r_1)(x - r_2) = 0$$

soit

$$x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 = 0$$

ou encore

$$x^2 - Sx + P = 0$$

On obtiendra le même résultat si on part du problème des deux nombres dont on connaît la somme et le produit et qui est à la base un système de deux équations à deux inconnues, soit deux nombre u et v à retrouver :

$$u + v = S$$

$$uv = P$$

alors (Viète vous le dirait tout de suite)

$$u = S - v$$

et

$$uv = (S - v)v = Sv - v^2 = P$$

soit

$$v^2 - Sv + P = 0$$

ce qui est la même équation.

15.21 Retrouver la formule à partir de 'square completion I'

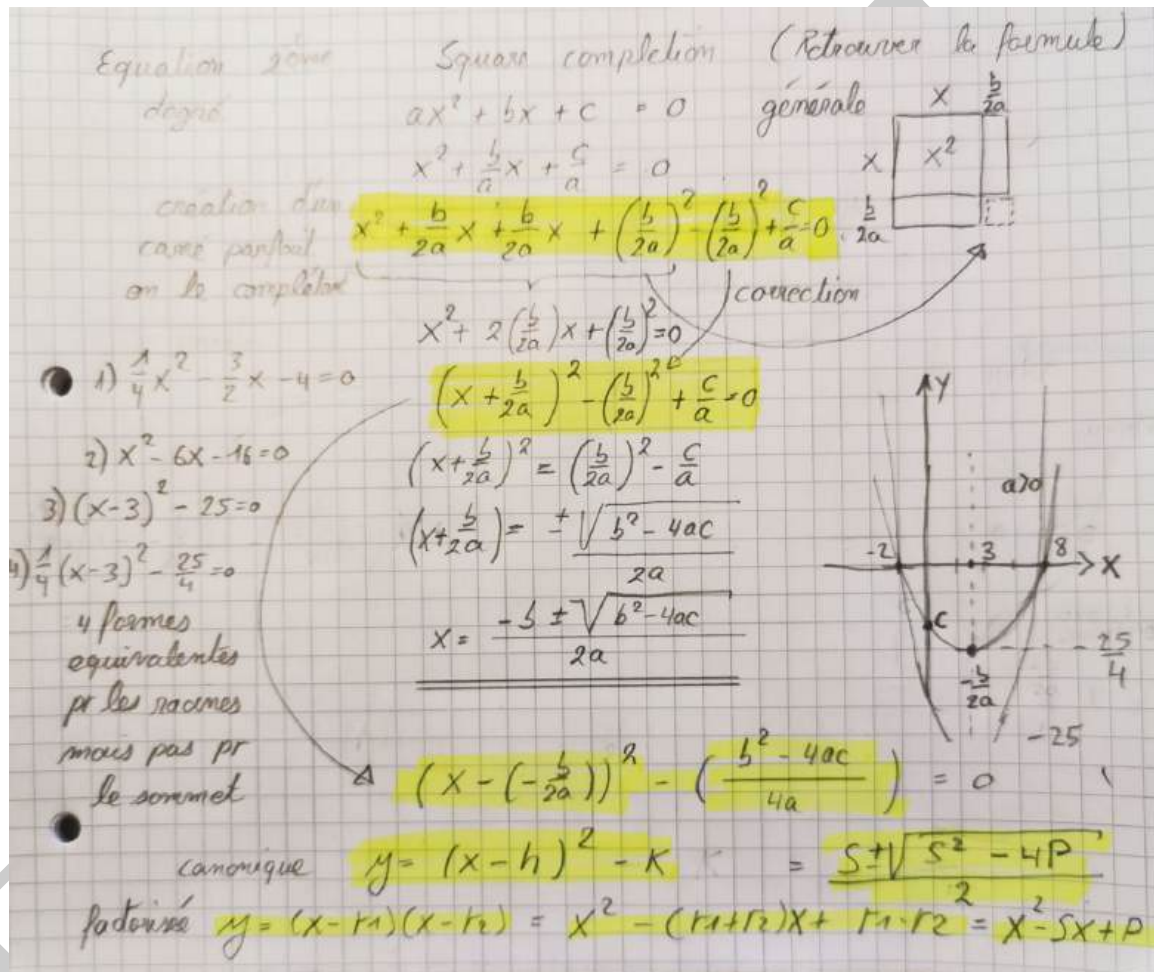


Figure 41: square completion I

Il y a une formule pour trouver la valeur des racines :

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$$

- Différentes formes et différents cas de figures importants pour retrouver des courbes (connus => à chercher)
- Retrouver le sommet, le point focal, la droite directrice à partir de $ax^2+bx+c=0$. Avec et sans utilisation de la dérivée.
- La forme la plus simple est $y=x^2$ ou alors la forme avec un carré parfait (canonique) $y=a(x-k)^2+p$ qui n'est qu'une forme 'étirée' et 'décalée' (shift and stretch) de la version précédente. Si la parabole est ouverte vers le haut et que son sommet est en dessus de l'axe des X, alors il n'y a pas de solutions dans le domaine des nombres reels.
- Racines : Cas facile, (pour $a > 0$) sommet sur axe des X, centre sur l'axe des Y ou pas (simple décalage). Solutions double. Sommet en dessous de axe X, centre sur Y, deux solutions symétrique au signe près
- Forme générale : (réduite ? cartésienne?) (mise en évidence de l'ouverture, vers le haut si $a > 0$), façon la plus simple pour calculer y).
- Forme factorisée : (racines apparaissent si $y=0$, foyers ?).
- Canonique : (mise en évidence du point P(h, k) et de l'ouverture a de la parabole (convexe, concave).
- Les cas de figures importants :
- Etant donnés : 2 points d'une droite, retrouver la forme générale, soit a et b (systèmes à 2 inconnues)
- Etant donnés : 3 points d'une parabole, retrouver la forme générale, soit a, b et c (systèmes à 3 inconnues)
- Etant donnés : Le sommet (h, k) et la convexité a (forme canonique), retrouver la forme factorisée (carré parfait => on trouve facilement les solutions en prenant la racine carrée de chaque côté)
- Cas d'emploi de la parabole et de l'équation quadratique
- Géométrie plane : Illustrer la parabole avec sa droite directrice, l'excentricité et le foyer en utilisant le cas de la réflexion des rayons lumineux dans un projecteur
- Géométrie : Métrique, trouver la distance entre deux droites, une droite et une parabole (Voir cours Herb Gross)
- Les coniques : (parabole, ellipse etc.). Il n'existe pas de formule pour le périmètre de l'ellipse.
- Equation générale dans le plan : $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, parler des difficultés et des méthodes pour traiter des paraboles inclinées (fonctions ?)
- Problème d'optimum (Résistance pour une puissance max transférée, gain max lors d'une vente etc.)
- Nombre d'or : deux segments l et L, $\Phi = \frac{l}{L} = \frac{L}{l+L}$ ou L est le grand côté du rectangle et l le petit côté du rectangle et du carré inscrit.

15.22 Retrouver la formule à partir d'opérations de décalages

$(r_1, 0)$ $(r_2, 0)$ $(0, \frac{c}{a})$ S K

$aX^2 + bX + c = 0$
 $\Rightarrow X^2 + \frac{b}{a}X + \frac{c}{a} = 0$ idem pr ϕ

$(X-r_1)(X-r_2) = 0$
 $X^2 - (r_1+r_2)X + r_1r_2$

Sommet
 $r_1 + (r_2 - r_1) = r_1 + r_2 - r_1 = \frac{r_1 + r_2}{2}$
 $\Rightarrow S_x = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{S}{2} = -\frac{b}{2a}$

$(-\frac{b}{2a})^2 + \frac{b}{a}(-\frac{b}{2a}) + \frac{c}{a} =$
 $\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{c}{a} = \frac{-b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$
 $S = (-\frac{b}{2a}, \frac{-b^2}{4a^2} + \frac{c}{a})$

$r_1 = S_x + \frac{r_2 - r_1}{2} = -\frac{b}{2a} + \frac{c}{a} + \frac{r_2 - r_1}{2}$

$u = X + (-\frac{b}{2a}) = X - \frac{b}{2a}$
 $(X - \frac{b}{2a})^2 + \frac{b}{a}(X - \frac{b}{2a}) + \frac{c}{a} = 0$
 $X^2 - 2\frac{b}{2a}X + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{b}{a}X - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{c}{a} = 0$
 $X^2 + (\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{c}{a}) = 0$

$X^2 + A = 0$

$X^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$
 $X = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$
 $\Rightarrow S = X - \frac{b}{2a}$
 $S = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Figure 42: Démonstration formule I

15.23 Retrouver la formule à partir de 'square completion II'

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-\frac{b}{a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{c}{a}}}{2}$$

$$x = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$$

$$(x - r_1)(x - r_2)$$

Méthode de complétion du carré
 ax² + bx + c = 0
 originale
 si l'on divise par a

ESO WIN
 item prog

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{2a}x + \frac{b}{2a}x = -\frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Figure 43: Démonstration formule II

Note : La formule ci-dessus contient une erreur, il manque le facteur 4 devant le produit :

$$X_{1,2} = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4P}}{2}$$

15.24 Retrouver la formule à partir valeur moyenne et deltas

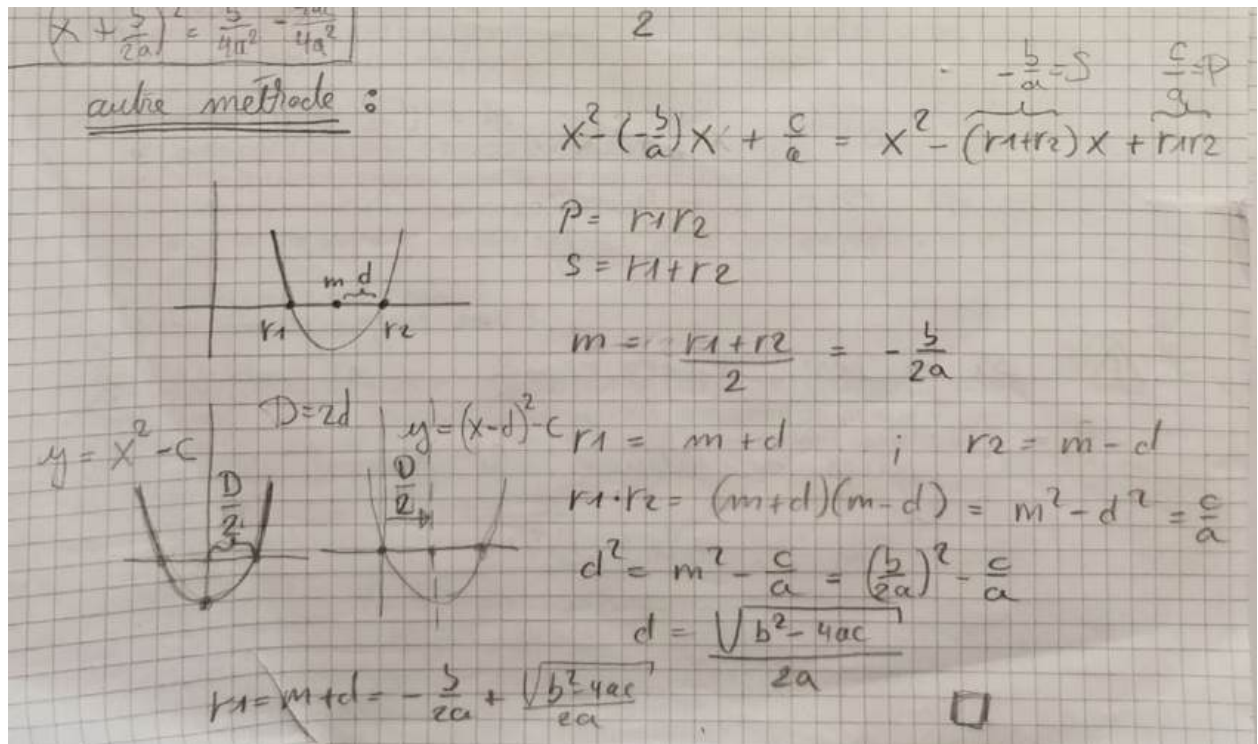


Figure 44: Démonstration formule III

15.25 Viète vous le dirait tout de suite !

La somme de deux nombres vaut S, leur produit vaut P. Quelles sont leurs valeurs ? Eh bien Viète vous le dirait tout de suite :

si

$$u + v = S$$

et

$$uv = P$$

alors

$$u, v = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}$$

15.26 Trouver les racines de l'équation du 2ème degré à partir de leur somme et leur produit ou en d'autres termes leur moyenne et leur différence

$$u, v = m \pm \sqrt{m^2 - P}$$

$$\begin{aligned} u, v &= \frac{u+v}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2 + 2uv + v^2}{4} - \frac{4uv}{4}} \\ &= \frac{u+v}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2 - 2uv + v^2}{4}} \\ &= \frac{u+v}{2} \pm \sqrt{\frac{(u-v)^2}{4}} \\ &= \frac{u+v}{2} \pm \frac{u-v}{2} \end{aligned}$$

2) $r_1 = M + d$
 $r_2 = M - d$

$x^2 - (-8x) + 15 = 0$
 $\begin{matrix} \underbrace{-8} & \underbrace{15} \\ S & P \end{matrix}$ (Somme) $r_1 \cdot r_2 = (M+d)(M-d) = M^2 - d^2$
 $15 = 16 - d^2$
 $d = \pm(16 - 15) = \pm 1$

$M = \frac{S}{2} = \frac{-8}{2} = -4$ (Moyenne)
 $P = 15$ (Produit)
 $r_1 = M + 1 = -4 + 1 = -3$
 $r_2 = M - 1 = -4 - 1 = -5$

$x^2 - (-8x) + 15 = 0$
 $x^2 + 8x + 15 = 0$
 $x^2 + 8x + 15 = 0$
 $x^2 + 8x + 15 = 0$

$y = ax^2 + bx + c = 0$; $\frac{b}{a} = -(r_1 + r_2) = -S$; $\frac{c}{a} = (r_1 \cdot r_2) = P$
 $y_2 = (x - r_1)(x - r_2) = 0$
 $y_2 = \frac{1}{a} y = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$; $\frac{c}{a} = (r_1 \cdot r_2) = P$
 $= x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 = 0$

voir clairement, dilatation, compr. d'une fonction (ne change pas les zéros)
 $x^2 + 2\left(\frac{b}{2a}\right)x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$
 $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \frac{\Delta}{4a^2}$
 $x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Familes générales
A) $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow y_2 = (x - x_1)(x - x_2)$
B) $x_{1,2} = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{S}{2}\right)^2 - P}$
C) $x_{1,2} = M \pm \sqrt{M^2 - P}$

Figure 45: Démonstration formule IV

15.27 Rappels

- quadrature d'une surface : c'est la recherche d'un carré de surface équivalente à la surface proprement dite, au moyen de la règle et du compas.
- quadrature : c'est le calcul de la surface sous la courbe
- méthodes des rectangles, des trapèzes etc (font appel à des interpolations)
- interpolations : recherche de fonctions (polynômes approchant la courbe et passant par des points connus. Permet de calculer les points entre ces points connus (spline, famille de fonctions trigo, ortho, série etc.).
- problèmes mal posés : dans ce genre de cas on peut avoir par exemple une très grande sensibilité aux conditions initiales (limitation de la précision du calculateur). Voir [Méthodes Numériques Alfio Quarteroni, pages 33, 35]
- Résolution numériques des équations différentielles ordinaires Voir [Méthodes Numériques Alfio Quarteroni, pages 33, 35]
- Voir livre [Introduction à l'analyse numérique Marco Picasso]

15.28 Paraboles et géométrie

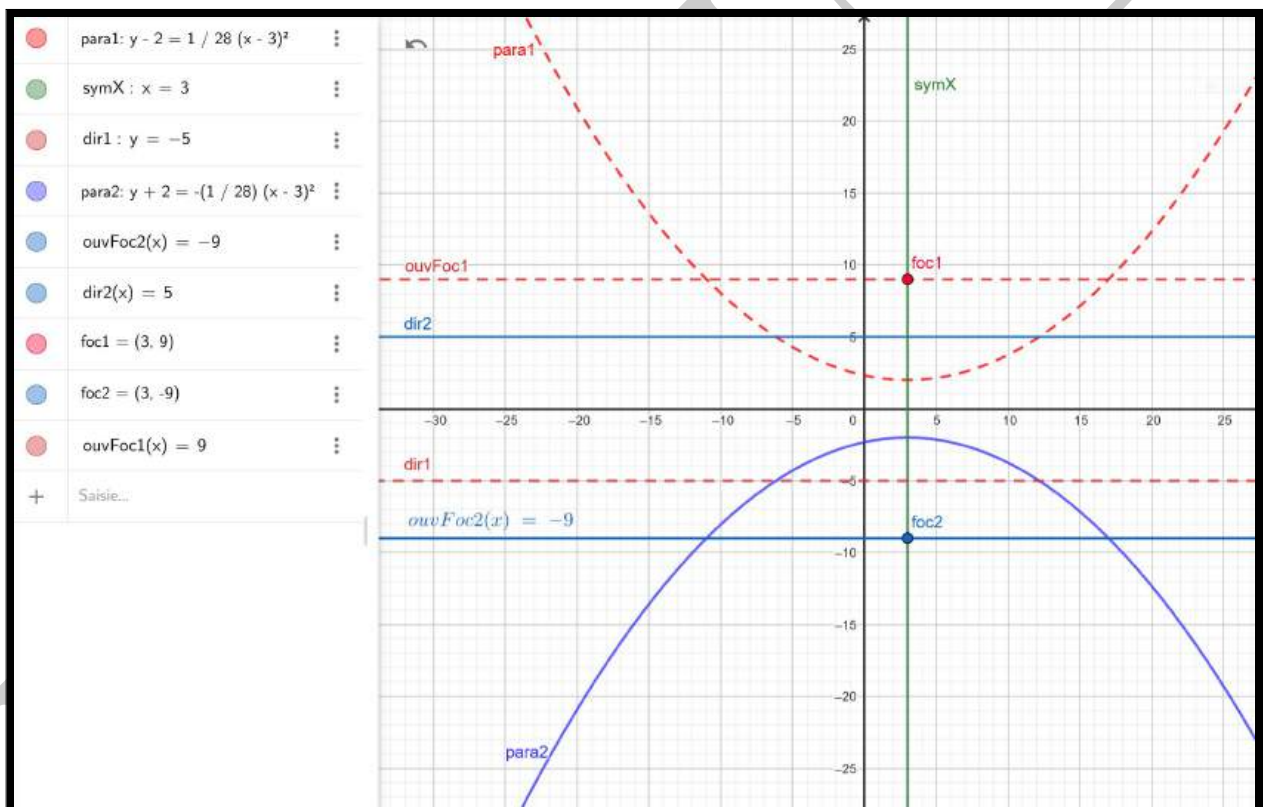


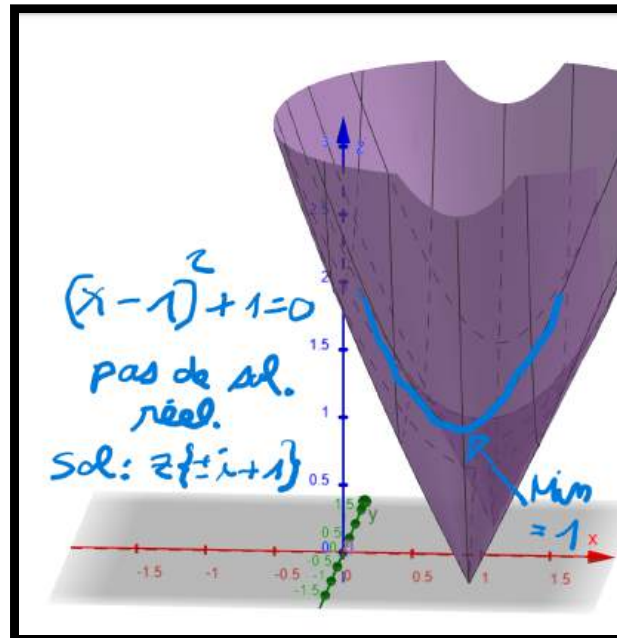
Figure 46: Equation canonique parabole avec focale

15.29 Solutions complexes : traçage préliminaire de la courbe du module de $F(z)$

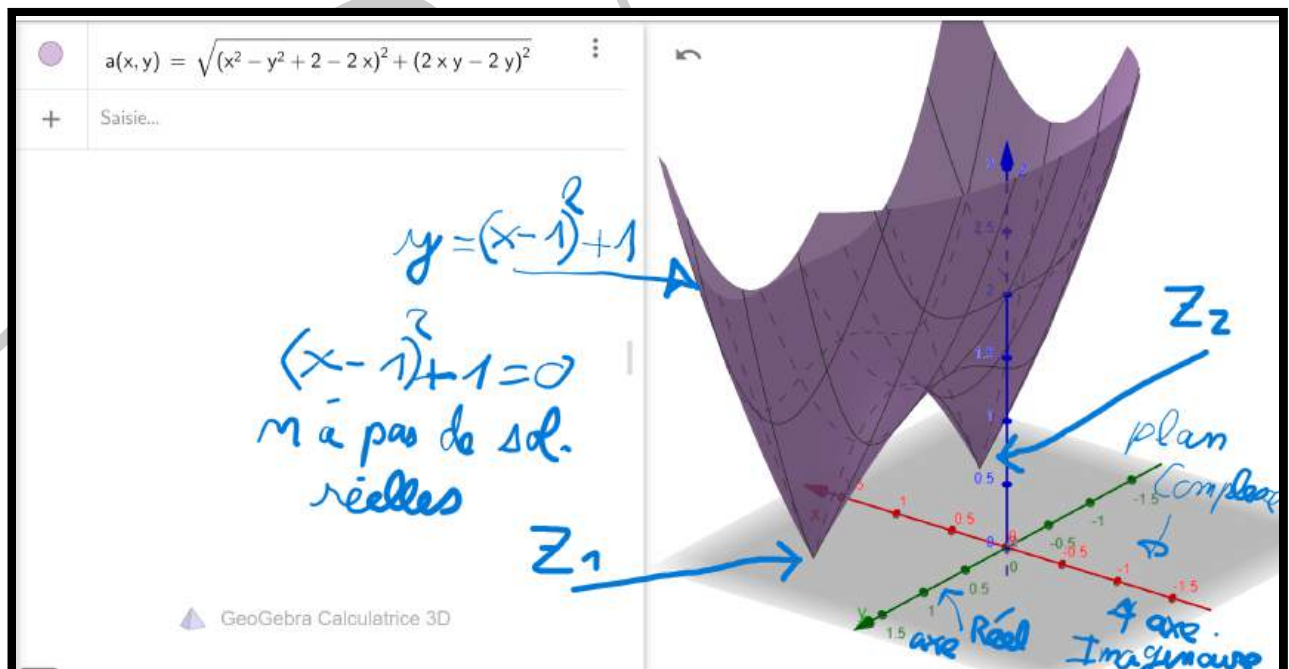
Avant de faire les calculs, on peut simplement tracer le module de la fonction complexe, ce qui est faisable sur un plot 3D avec Geogebra. Par contre il faut expliciter soi-même le module de la fonction $F(x,y)$ où les deux variables indépendantes joueront le rôles respectivement d'axe des réels et d'axes des imaginaires.

$$F(z) = (z - 1)^2 + 1 = 0$$

$$|F(z)| = \sqrt{Re^2 + Im^2}$$



Ou en tournant le plan complexe, [Refaire les annotations au propre](#)



15.30 Autres Formes (deg2)

Résumé de toutes les Coniques (deg 2) : étudions les différentes formes importantes de ces deux polynômes séparés en X et en Y (il n'y a jamais de termes XY). La forme complètes, ou tous les termes sont présents est une ellipse ou un cercle dont le centre est n'importe où dans le plan et de rayon ou les demis axes quelconques. Pas de variable indépendante.

$$A(x + a)^2 + B(y + b)^2 + C = 0$$

15.30.1 Paraboles

(dégénérées en droites, ou valeurs absolues si a ou b = 0), une des variables est linéaire et l'autre seulement au carré. Si il y a une variable indépendante sous forme linéaire ou une constante c'est une parabole décalée dans le plan.

$$y = ax^2$$

ou

$$x = ay^2$$

15.30.2 Ellipse ou cercle (si a et b = 1)

$$ax^2 + by^2 = R^2$$

15.30.3 Hyperbole (a et b différents de 1 ?)

$$ax^2 - by^2 = 1$$

ou

$$ay^2 - bx^2 = 1$$

15.31 Fractions rationnelles et éléments simples

Dans ce chapitre on va parler de la mise au même dénominateur de fractions contenant des polynômes, ainsi que l'opération inverse, soit la mise sous forme d'éléments simples

$$\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x-2)} = \frac{(x-2) - (x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{(x-1)(x-2)}$$

$$\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-2)} = \frac{(x-2) + (x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{2x-3}{(x-1)(x-2)}$$

$$\frac{x}{(x-1)} + \frac{1}{(x-2)} = \frac{x(x-2) + (x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^2 - x - 1}{(x-1)(x-2)}$$

Si une fraction a un degré au numérateur plus grand qu'au dénominateur il faut commencer par essayer de la diviser pour obtenir un terme séparé ainsi qu'une fraction dont le dénominateur a le degré plus élevé. Illustrons ceci mais en faisant l'opération dans l'autre sens :

$$x + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-1)^2 + 1}{(x-1)^2} = \frac{x^3 - 2x^2 + x + 1}{(x-1)^2}$$

On voit que si on part du terme de droite et qu'on le divise par $(x-1)^2$ (faire comme exercice, comme une division de deux nombres entiers, ne pas oublier de développer le terme au carré) on éliminera le problème du numérateur de degré plus élevé mais on aura deux fractions.

Ici on a volontairement choisi un exemple où le dénominateur est élevé au carré et on va en profiter pour introduire la notion de multiplicité.

15.31.1 Multiplicité

Les formes les plus compliquées des fractions que l'on veut mettre au même dénominateur sont de la forme suivante :

$$\frac{(ax-b)}{(x-1)} + \frac{(cx-d)}{(x-2)} = \frac{ex^2 + fx + g}{(x-1)(x-2)}$$

Et si on a un dénominateur qui se répète à une puissance N (Ici N=2) :

$$\frac{(ax-b)}{(x-1)^2} + \frac{(cx-d)}{(x-1)} = \frac{ex^2 + fx + g}{(x-1)(x-1)}$$

Ainsi il faut prévoir la solution la plus compliquée, la solution se simplifiera d'elle même s'il le faut :

$$\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(ax-b)}{(x-1)^2} + \frac{(cx-d)}{(x-1)}$$

$$1 = ax - b + cx^2 - cx - dx + d$$

$$c = 0, a - c - d = 0, d = 1, a = c + d = d = 1$$

$$\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)}$$

ET SIO ON CONTINUE A EXTRAIRE POUR AVOIR 3 TERMES ? et c'est un peu étrange car le résultat obtenu est plus compliqué que la fraction de départ !

Néanmoins dans certains problèmes il faut absolument faire cette décomposition pour réussir à trouver toutes les solutions de l'équation (voir équations différentielles).

$$\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(ax-b)}{(x-1)} + \frac{(cx-d)}{(x-1)}$$

$$1 = ax^2 - (a+b)x + b + cx^2 - (c+d)x + d$$

$$a+c=0, a+c=b+d=0, b+d=1$$

mais comme

$$0 = b+d = 1$$

n'a pas de solution cette forme n'est pas possible. Les termes de droite sont déjà au même dénominateur, amplifier la fraction ne permettra pas d'obtenir une égalité avec le 1 de gauche.

15.32 Christmas equation

$$y = \frac{\ln\left(\frac{X}{M} - Sa\right)}{r^2}$$

$$r^2 y = \ln\left(\frac{X}{M} - Sa\right)$$

$$e^{r^2 y} = \frac{X}{M} - Sa$$

$$Me^{r^2 y} = X - MaS$$

16 Problèmes importants impliquant des équations du second degré

16.1 Problème d'optimisation d'une grandeur : vente optimale d'un prix de billet de bus

Une société qui organise des excursions en autocar a remarqué que, lorsqu'elle demande 9.- par personne et par excursion, le nombre de clients moyen est de 1000CHF par semaine et lorsqu'elle réduit le prix à 7.-, ce nombre s'élève à 1500CHF. En supposant que la demande (c'est-à-dire le nombre de clients) est une fonction affine, à combien la société doit-elle fixer le prix de l'excursion pour maximiser ses recettes hebdomadaires ?
graphe offre-demand trouver équation $y=mx+y_0$ Formule Capital hebdo, voir max

16.2 Puissance soutirée à une batterie en fonction de l'appareil connecté

Puissance, énergie et rendement d'une système qui alimente RL si on tient compte de Ri. Cas particulier $RL=R_i$.

16.3 Système d'équations linéaires surdimensionné impliquant une équation non-linéaire pour sa résolution : Meilleure approximation, méthode des moindres carrés

Dans la pratique, les systèmes surdéterminés interviennent naturellement dans des processus expérimentaux. Imaginons qu'un processus idéal soit décrit par l'équation suivante :

$$y = ax + b$$

où x et y sont les grandeurs qui varient et que l'on peut mesurer et où on recherche les valeurs des constantes a et b . En effectuant N mesures de y pour N valeurs différentes de x , on obtient N couples de valeurs qui permettent de poser N équations contenant les deux inconnues a et b .

Dans l'exemple ci-dessous $N = 5$. On a la garantie que les équations sont linéairement indépendantes car les x (qui multiplient les a) sont tous différents et les b sont multipliés par 1.

$$\begin{aligned} (y_1, x_1) \quad a x_1 + b &= y_1 \\ (y_2, x_2) \quad a x_2 + b &= y_2 \\ (y_3, x_3) \quad a x_3 + b &= y_3 \\ (y_4, x_4) \quad a x_4 + b &= y_4 \\ (y_5, x_5) \quad a x_5 + b &= y_5 \end{aligned}$$

Si les mesures étaient infiniment précises, on aurait cinq équations compatibles, c'est à dire qu'elles seraient toutes justes et autant valables les unes que les autres. On pourrait donc en **choisir deux au hasard** pour créer le système de deux équations à deux inconnues permettant de retrouver les valeurs exactes de a et b .

$$\begin{aligned} (y_2, x_2) \quad a x_2 + b &= y_2 \\ (y_5, x_5) \quad a x_5 + b &= y_5 \end{aligned}$$

On aurait donc une solution pour ce système surdéterminé et le choix des équations n'aurait pas d'importance.

Dans la réalité il y a toujours une incertitude sur les mesures et de toute façon le processus ne peut pas être idéal. Chaque couple d'équations choisies parmi les équations de base donnera certainement d'autres valeurs pour a et b . Les équations ne sont **pas compatibles**.

16.4 Système d'équations linéaires à deux inconnues impliquant une équation non-linéaire pour sa résolution : calcul des valeurs et vecteurs propres d'une matrice (méthode par substitution)

$$x - y = kx$$

$$2x + 4y = ky$$

Trouver k pour que le système soit valide pour certains couples (x,y) . Si on voulait trouver x,y et k il faudrait une équation supplémentaire. On va d'abord chercher k puis un couple (x,y) qui satisfait le système (x et y seront liés).

$$x - y = kx$$

donc

$$y = x(1 - k)$$

ensuite

$$2x + 4y = ky$$

alors

$$2x + (4 - k)y = 0$$

$$2x + (4 - k)(1 - k)x = 0$$

$$2x + [4 - 4k - k + k^2]x = 0$$

$$[k^2 - 5k + 6]x = 0$$

Et on s'aperçoit que pour résoudre ce problème qui semblait être un système de deux équations linéaires avec un paramètre, il faut passer par la résolution d'une équation du 2ème degré.

On factorise facilement cette équation car les racines sont particulièrement simples (on voit que 6 est le produit de deux nombres entiers, par exemple 1 et 6 mais ça ne marche pas, par contre avec 2 et 3 on est bon !

$$(k - 2)(k - 3)x = 0$$

relation valide pour tout x si $k = (2,3)$.

Si on pose $x = 1$ et que l'on utilise $k=2$ dans la première équation du système, on trouvera $y = x(1 - k) = 1(1 - 2) = -1$, on a donc un couple x et $y = (1,-1)$ qui satisfait le système d'équations de départ. Si on fait la même chose dans la deuxième équation on va s'apercevoir que **les deux équations ne sont pas (et ne doivent pas être) linéairement indépendantes**, on trouvera le même résultat pour le premier vecteur propre.

Il y a un **deuxième vecteur propre associé à $k=3$** et on refait exactement les mêmes calculs : on pose $x = 1$ et on utilise cette fois $k=3$, on trouve : $y = x(1 - k) = 1(1 - 3) = -2$, on a donc un couple x et $y = (1,-2)$.

En fait tout couple x et $y = (u,-u)$ et x et $y = (u,-2u)$ satisfera le système d'équation de départ, il s'agit des **deux vecteurs propres associés aux valeurs propres $k = (2,3)$** .

Interprétation : Si x et y étaient les composantes d'un vecteur, ou la position d'un point par rapport à l'origine, le système dilate simplement x et y . Cela reviendrait à allonger le vecteur (éloigner le point) dans la même direction qu'au départ. C'est donc la transformation la plus simple que l'on puisse faire sur x et y , ils se dilatent par le facteur k (voir image du vecteur fin page suivante).

16.5 Système d'équations linéaires à deux inconnues impliquant une équation non-linéaire pour sa résolution : calcul des valeurs et vecteurs propres d'une matrice (méthode matricielle)

L'idée est toujours de rechercher pour une matrice donnée, quels sont les vecteurs qui lorsqu'ils multiplient une matrice sont simplement dilatés (colinéaires, sorte d'invariance). Le système que l'on a vu précédemment peut être écrit sous la forme suivante $A \cdot V_{xy} = k \cdot V_{xy}$ soit :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Comme d'habitude, pour résoudre des équations il faut essayer de factoriser et donc dans le cas présent trouver x et y . Si on fait quelques manipulations pour isoler x et y on va rencontrer un problème :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - k \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$$

En effet la soustraction entre parenthèse n'a pas de sens. On ne peut pas soustraire un scalaire k d'une matrice. Pour que cela soit cohérent il faut multiplier k par la matrice identité I qui est l'équivalent du 1 pour les matrices. Multiplions donc des deux côtés par la matrice identité pour avoir des matrices de dimensions cohérentes $A \cdot V_{xy} = k \cdot I \cdot V_{xy}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (1-k) & -1 \\ 2 & (4-k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si la matrice A possède un inverse alors $A \cdot A^{-1} = I$, le vecteur $[x, y]$ vaudra 0. Le système n'aura donc qu'une solution triviale ($x=0$ et $y=0$).

$$\begin{bmatrix} (1-k) & -1 \\ 2 & (4-k) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} (1-k) & -1 \\ 2 & (4-k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-k) & -1 \\ 2 & (4-k) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Mais on cherche des vecteurs non-nuls. La seule possibilité pour que l'expression soit nulle pour tous vecteurs $[x, y]$ c'est que l'on ne puisse pas inverser la matrice **La théorie nous dit que si le déterminant d'une matrice est nul, cette dernière ne peut pas être inversée.**

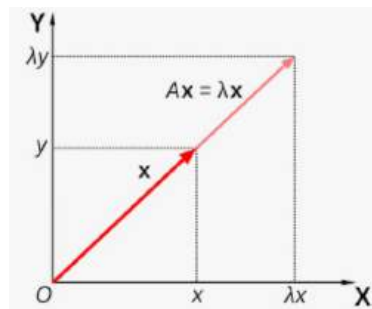
$$\det \begin{bmatrix} (1-k) & -1 \\ 2 & (4-k) \end{bmatrix} = 0$$

soit :

$$(1-k)(4-k) - 2(-1) = 0$$

ce qui rend l'équation matricielle valide pour tout (x, y) lorsque $k = (2, 3)$. On obtient donc la même chose qu'à la page précédente avec la méthode de substitution plus classique.

Résultat : tout couple x et $y = (\mathbf{u}, -\mathbf{u})$ et x et $y = (\mathbf{u}, -2\mathbf{u})$ satisfera le système d'équation de départ, il s'agit des deux vecteurs propres associés aux valeurs propres $k = (2,3)$.



On exprime toujours un vecteur de dimension N au moyen de N nombres scalaires, les composantes qui multiplient chacune, un des N vecteurs élémentaires du système (par exemple les vecteurs unitaires i , j et k des axes X , Y et Z en 3D). Dans ce cas ces trois vecteurs forment une base. Elle est arbitraire et il y en a une infinité. Utiliser les vecteurs propres en tant que base peut grandement simplifier la résolution de certains problèmes.

16.6 Quantité de mouvement et énergie cinétique

Cet exemple est important car on le retrouve souvent, par exemple en physique dans l'analyse de la quantité de mouvement et il y a un truc pour résoudre ce système plus facilement.

$$\begin{aligned} I \quad & (x^2 - a^2) = c(y^2 - b^2) \\ II \quad & (x - a) = c(y - b) \end{aligned}$$

Nous avons donc deux équations à deux inconnues et une des équations possède des termes élevés au carré. On pourrait être tenté de procéder de la suivante :

$$III \quad x = c(y - b) + a$$

Après avoir isolé x de l'équation II, on substitue ce dernier dans l'équation I et on effectue. Cela fait beaucoup de calculs pour arriver à une équation de la forme :

$$r y^2 + s y + t = 0$$

où il faudra encore calculer les racines les substituer dans III. Il ne faut pas suivre ce chemin pour résoudre ces équations.

En effet, remarquez dans l'équation I il y a deux identités remarquables ! Cela va nous aider à résoudre plus facilement le problème. Notre système d'équations ressemble à ça :

$$\begin{aligned} A &= B \\ C &= D \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A &= (x^2 - a^2) \\ B &= c(y^2 - b^2) \\ C &= (x - a) \\ D &= c(y - b) \end{aligned}$$

rien ne nous interdit de diviser l'équation du haut par C si $C \neq 0$,

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{C}$$

et comme $C = D$ on voit que,

$$\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$$

On peut donc diviser les membres de gauche ensemble et faire de même pour les membres de droite.

En prenant les deux équations de départ :

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 - a^2)}{(x - a)} &= \frac{c(y^2 - b^2)}{c(y - b)} \\ \frac{(x + a)(x - a)}{(x - a)} &= \frac{c(y + b)(y - b)}{c(y - b)} \end{aligned}$$

Pour info : a et b sont les vitesses initiales, x et y les vitesses après le choc élastique direct et c le rapport des deux masses :

A ce niveau on sait déjà que les solutions $x = a$ et $y = b$ ne peuvent pas faire partie du domaine de solutions sinon il y aurait une division par zéro. **D'ailleurs dans le problème physique réel c'est cohérent car on s'aperçoit que c'est seulement lorsque la masse d'un des objets tend vers l'infini que x tend vers a ¹³.**

$$(x+a)=(y+b)$$

$$IV \quad y=x+(a-b)$$

$$x=c(y-b)+a$$

$$x=c(x+a-b-b)+a$$

$$V \quad x=\frac{a(1+c)-2bc}{1-c}$$

$$y=x+(a-b)$$

$$VI \quad y=\frac{-b(1+c)+2a}{1-c}$$

On obtient ces solutions sans faire de racines carrées. Cela vaut donc la peine de vérifier si on peut mettre deux équations sous la forme présentée dans cet exemple. Il faudra vérifier ce que signifie $x = a$ et $y = b$ dans le problème étudié.

Montrer le problème identique mais plus simple où $V_2=0$. Il y a un problème avec une des solutions que l'on obtient.

Voir vitesse deux masses ponctuelles après choc élastique dans doc EM "recap_phi.doc" (13)

16.7 Equations de degrés supérieurs et polynômes

où les C_n sont des nombres complexes (Avec éventuellement des racines),

$$y = f(x) = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + \dots + C_1 x^1 + C_0 x^0$$

équivalent à la forme suivante :

$$y = f(x) = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + \dots + C_1 x + C_0$$

16.8 Loi binômiale et calcul des coefficients I

Nombres de termes : puissance (n) + 1 car index ou position allant de 0 à n (k va seulement de 1 .. n)

$$(a + b)^7 = 1a^7b^0 + 7a^6b^1 + \dots + 1a^0b^7$$

$$C_0 = 1$$

$$k = 1 \dots n$$

$$(a + b)^n = C_0 a^n b^0 + \sum_{k=1}^n C_{k-1} \frac{n - (k-1)}{k} a^{n-(k)} b^k$$

(pour k = 1 ... n)

16.9 Calcul des coefficients triangle de Pascal II

16.10 Loi binômiale et calcul des coefficients III

$$(a + b)^n = a^n b^0 + \frac{n!}{(n-k)!(k)!} a^{n-1} b^1 + \dots$$

$$(a + b)^n = a^n b^0 + \binom{n}{k} a^{n-1} b^1 + \dots$$

16.11 Théorème fondamental de l'algèbre

On peut toujours mettre l'expression précédente sous la forme suivante :

$$y = f(x) = \frac{1}{C_n} [(x - r_n)(x - r_{n-1}) \dots (x - r_0)] = 0$$

Le théorème fondamental de l'algèbre dit que tout polynôme de degré n possède exactement n solutions (complexes et/ou réelles). A partir du 4ème degré il n'y a pas de formule générale et il est rarement possible de l'écrire sous la forme de radicaux. On peut par contre trouver les valeurs approchées de toutes les racines.

16.12 Equation du 4ème degré qui se simplifie (exceptions et trucs)

Comme on l'a vu au chapitre précédent il n'y a pas de formules pour trouver les solutions des équations dont le degré est supérieur à 4. Même pour ce degré et pour le 3ème les calculs sont longs et fastidieux, sauf si on a une équation qui se simplifie comme par magie (cas d'école) et qu'on utilise quelques trucs. Je n'aime pas tellement montrer les choses qui manquent de généralité mais la résolution de celle-ci est quand même assez belle et fait appel à différents "trucs et astuces" qu'il est bon de connaître (réflexes qu'il faut avoir avant de se lancer tête baissée dans le problème).

$$(x + 1)^2 + (x + 2)^3 + (x + 3)^4 = 2$$

16.13 2 équations à 2 inconnues au 2ème degré (systèmes linéaires déguisés) :

$$u^2 + v^2 + k = 0$$

$$u^2 - v^2 + h = 0$$

Ce genre de système ne représente pas de difficulté particulière. En effet on constate qu'il a la structure d'un système de 2 équations à 2 inconnues et qu'il peut être ramenés à 2 équations linéaires après une substitution du genre $x = u^2$ et $y = v^2$.

$$u^2 + v^2 = 13$$

$$u^2 - v^2 = 5$$

On donne déjà une des réponses $u = 3$ et $v = 2$ et on voit que l'on travaille simplement avec leur carrés (9 et 4). On vérifie aisément que les égalités sont respectées et on pourrait résoudre le système de façon suivante :

$$x + y = 13$$

$$x - y = 5$$

ou on a fait la substitution suivante $x = u^2$ et $y = v^2$. Une fois les résultats trouvés il faudra pas oublier de revenir en arrière au moyen de racines carrée $u = \pm\sqrt{x}$, ou l'on voit que cela nous donne 2 solutions pour u (introduites par les carrés). Les valeurs ($u=-3$ et $v=2$) sont aussi solutions. Donc attention au nombre de solutions finales introduites par les changements de variables. Ici on aura 4 paires de nombres qui sont solutions du système.

16.13.1 Du même style

Les systèmes d'équations sous les formes suivantes se résoudront selon le même principe (substitutions pour avoir des équations linéaires) :

$$\cos(u^2) + \sin(v^2) + k = 0$$

$$\cos(u^2) - \sin(v^2) + h = 0$$

ou plus simple :

$$\cos(u) + \sin(v) + k = 0$$

$$\cos(u) - \sin(v) + h = 0$$

et encore ;

$$\sqrt{u} + \sqrt{v} + k = 0$$

$$\sqrt{u} - \sqrt{v} + h = 0$$

etc.

16.14 Autres systèmes à connaître

$$u^2 + v^2 + g = 0$$

$$2uv + p = 0$$

Rés poly deg 3 :

$$u^3 + v^3 + g = 0$$

$$3uv + p = 0$$

16.15 Théorème des racines rationnelles

Soit un polynôme P tel que $P(x) = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + \dots + C_1 x + C_0$, P admet une racine rationnelle $r = \frac{p}{q}$ si p divise C_0 et q divise C_n . P et q doivent être premiers entre eux.

Exemple avec des chiffres :

$$(2x - 1)(3x - 1)(x - 5)(x - 7) = 0$$

où l'on voit immédiatement que les racines sont $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 5$ et 7 , ce qui donne une fois développé :

$$6x^4 - 77x^3 + 271x^2 - 187x + 35 = 0$$

On pourrait avoir des parenthèses sous forme générale $(ax - b)$ où la racine vaut $\frac{b}{a}$ et il y aurait des coefficients et racines rationnels, mais dans les exemples de ce chapitre, pour mieux voir comment fonctionne le principe, on a simplifié les racines (Les inverses des premières racines sont placés comme multiplicandes des x et les dernières racines sont placées dans les constantes).

En effet de cette façon on aura toujours un des nombres de la racine rationnelle qui vaut 1. On illustrera le principe en utilisant l'équation du 2ème degré que l'on connaît par coeur :

$$(x + 1)(x + 5) = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2 = 0$$

$$x^2 - ((-1) + (-5))x + (-1)(-5) = 0$$

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

Donc dans ce cas, où l'on a placé les racines dans les constantes, P admet les racines "rationnelles" $\frac{p}{q} = \frac{-1}{1}$ et $\frac{p}{q} = \frac{-5}{1}$ car les p (-1,-5) divisent $C_0 = 5$ (même si ils sont négatifs) et les 1 divisent $C_2 = 1$.

Une forme développée d'un polynôme quelconque pourra toujours avoir une telle forme si on réarrange les termes :

$$(ax - 1)(bx - 5)(cx - 1) \dots (x - u)(x - v)(x - w) = 0$$

$$abcx^n + \dots + uvw$$

et si on ne s'occupe que du premier et du dernier coefficient cela nous donne des indices sur les racines potentielles que ce polynôme peut posséder, comme dans le cas du polynôme du 2ème ordre précédent.

C'est donc logique que le premier coefficient soit divisible par a, b et c et que pour le dernier ce soit u, v et w. Si on regarde attentivement on voit que u, v et w sont trois des racines alors que a, b et c sont l'inverse des trois autres racines $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ et $\frac{1}{c}$.

Donc dans notre cas P admet des racines $r_{1,2,3} = \frac{p}{1}$ car p (u,v,w) divise C_0 et 1 divise C_n et des racines $r_{4,5,6} = \frac{1}{q}$ car q = (a,b,c) et divise C_n et 1 divise C_0 .

Voici une façon intuitive de voir pourquoi fonctionne ce théorème. En toute généralité il peut y avoir des coefficients entiers, rationnels ou irrationnels dans l'équation et c'est à la première phrase du chapitre qu'il faut se référer.

16.16 Pour aller plus loin : dérivée partielle sous forme implicite de de la formule quadratique générale

(De BlackPenRedPen 'I differentiate the quad...') ! On veut voir comment varie X lorsqu'on change légèrement le paramètre a dans l'équation quadratique sous forme implicite. La fausse réponse :

$$\frac{\partial X}{\partial a} = \frac{\partial(aX^2 + bX + c = 0)}{\partial a} = X^2$$

La réponse correcte (Ne pas oublier de faire la 'chain rule') :

$$\frac{\partial(aX^2 + bX + c = 0)}{\partial a} = 2aX \frac{\partial X}{\partial a} + \frac{\partial a}{\partial a} X^2 \quad \text{ou} \quad X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (I)$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial(F(x) = 0)}{\partial a} = \frac{-X^2}{2aX + b}$$

et ne pas oublier de substituer X avec (I)

Que se passe t'il lorsqu'on s'approche des valeurs qui font que la racine devient multiple ou complexe ?

16.17 Formule quadratique générale avec a,b et c fonction de X

On est habitué à la voir sous cette forme,

$$aX^2 + bX + c = 0$$

Peut-on utiliser la formule générale pour résoudre ce genre d'équations ?

$$X^2 + X \sin(X) - \frac{1}{4} \cos^2(X) = 0$$

Ce qui donnerait :

$$X_{1,2} = \frac{-\sin(X) \pm \sqrt{\sin^2(X) - 4 \cdot (-\frac{1}{4} \cos^2(X))}}{2}$$

$$X_{1,2} = \frac{-\sin(X) \pm \sqrt{\sin^2(X) + \cos^2(X)}}{2}$$

$$X_{1,2} = \frac{-\sin(X) \pm 1}{2}$$

Note . Il faudra de toute façon passer par une approximation de Newton-Raphson pour trouver un zéro.

Il faut avouer qu'ici on a préparé le problème pour que ça se simplifie sous la racine. Mais que dire de cette méthode, est-ce une bonne stratégie, est-ce plus simple ? Ça peut rendre service, mais est-ce si fréquent ?

16.18 Equations implicites pour représentation rotation courbes

Le fait de tourner une courbe toute simple comme décrite par $y = x^2$ ou $y = \ln(x)$ rend les équations beaucoup plus compliquée à cause du changement de référentiel. Ce qui était au départ une fonction décrite par une équation explicite n'est plus une fonction et doit être en plus décrite par une équation explicite. Voici deux exemples avec la parabole et le logarithme tourné de 45° par rapport au référentiel initial.

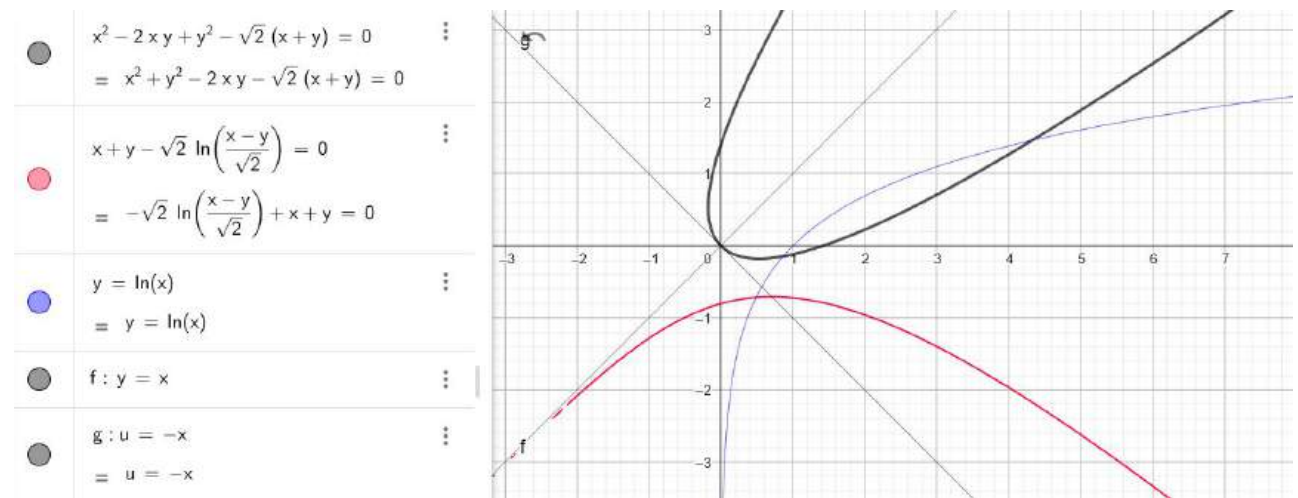


Figure 47: Equation implicite et rotation courbe

Note : dans certains cas on peut aussi représenter la courbe par deux équations paramétriques pour x et pour y (par exemple $f(t)$ et $g(t)$).

17 Equations du 3ème degré, résolution avec Python et méthode de Cardan (Cardano)

17.1 Démo avec Python 2.7

Dans le répertoire C:\Users\ejsmu\Dropbox\work\ipython_py2\funcz

Lancer D:\applications\python.exe cardan.py

Voir code car il y a des caractères générés non supportés sur W10 !

```
c:\Users\ejsmu\Dropbox\work\ipython_py2\funcz>
d:\applications\python.exe cardan.py
Equation en cours de resolution :
1.0 X**3 + (3+3j) X**2 + (-2+9j) X + -6.0 = 0 (1)
p, q = (-2+3j) (1-3j)
(-1.18518518519-4.66666666667j)
(1.34715062811-1.73205080757j)
U, V = (0.173575314055+0.633974596216j) (-1.17357531405+2.36602540378j)
(-1.7037037037-0.333333333333j) = (-1.7037037037-0.333333333333j)
1ere solution de la racine cubique
(0.788675134595+0.366025403784j) (0.211324865405-1.36602540378j) (1-1j)
y = (1-1j) => x = -2j arrondi a 9 digits
(-0.711324865405+0.5j) (-1.28867513459+0.5j) (-2+1j)
y1 = (-2+1j) => x1 = (-3+0j) arrondi a 9 digits
(-0.0773502691896-0.866025403784j) (1.07735026919+0.866025403784j)
(1+8.881784197e-16j)
y2 = (1+8.881784197e-16j) => x2 = (-0-1j) arrondi a 9 digits
```

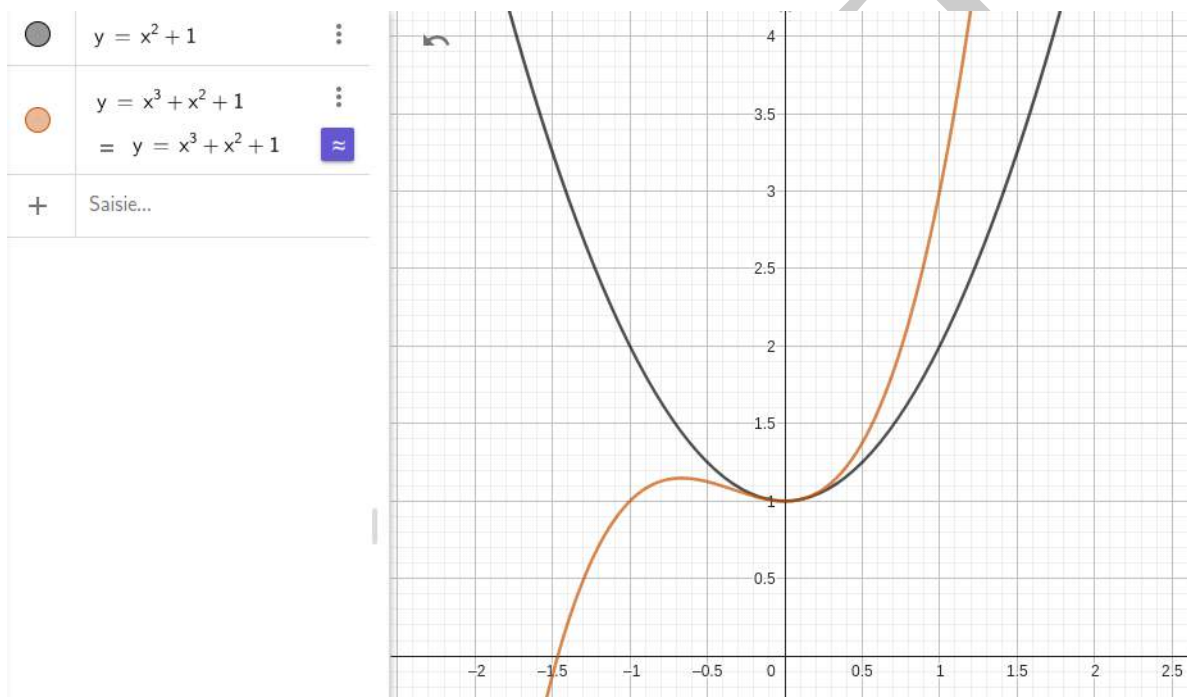
17.2 Début du code cardan.py

```
#Pour afficher chaque ligne en cours d'execution taper dans un shell :
python -m trace -t cardan.py
ss=""
from cmath import *
ss="Soit a resoudre une equation de la forme suivante : "
ss="aX**3 + bX**2 + cX + d = 0"
ss=""
ss="1er exemple"
ss="(X+j)(X+2j)(X+3) = 0 d'ou l'on extrait aisement les racines."
ss="Meme equation sous sa forme developpee : X**3 + (3+3j)X**2 -
(2-9j)X - 6 = 0"
a=1.0
b=3.0+3.0j
c=-2.0+9.0j
d=-6.0
ss=""
ss="2eme exemple"
ss="(X+1)(X+2)(X+3) = 0 d'ou l'on extrait aisement les racines."
ss="Meme equation sous sa forme developpee : X**3 + 6X**2 + 11X + 6 = 0"
```

18 Equations de degrés 1, 2, 3 et 4, notes sur méthodes de résolution à la main

Pour terminer le chapitre sur les racines des polynômes on va récapituler les grands principes de résolution de ces équations en partant de degré 1 jusqu'au degré 4, degré le plus élevé pour lequel il existe une formule exacte. Nous ne ferons d'ailleurs pas tous les développements pour ce degré car les calculs sont beaucoup trop longs.

La résolution des équations du 1er degré ne présentent aucune difficulté. Trouver les solutions des équations polynomiales à une inconnue X de degré $2 \leq N$ revient à chercher les N zéros de la fonction $y = f(x)$. Cela revient à mettre son équation sous une forme factorisée (Voir identités remarquables). Si on trace la fonction et que les racines sont réelles, chaque zéro sera visible sur le graphique et sera une des intersections de la courbe avec l'axe des X . Si les zéros sont complexes, on ne les verra pas sur le graphique car on n'a que 2 dimensions. On montrera dans un autre chapitre qu'il est possible de les voir sur un graphique en 3 dimensions (Tracer le module de la fonction en parcourant le plan complexe). Voici donc des équations ayant des racines complexes :



On sait que l'équation du 2ème degré possède deux racines (complexes) et que l'équation du 3ème degré en a trois, 2 complexes et une réelle ou 1 racine triple (sur le graphe ci-dessus, 2 complexe et 1 réelle). Il faudrait ajouter l'axe des imaginaires et tracer le module de la fonction sur l'axe vertical.

La première chose à faire c'est de voir si on a une forme particulière qui se simplifie. Si on reconnaît une identité remarquable, le problème est terminé (voir page précédente avec le triangle de Pascal pour trouver les coefficients des identités remarquables de degré 1 à 4), donc si on trouve une expression du genre :

$$\begin{aligned} x^3 + 6x^2 + 12x + 8 &= 0 \\ x^3 + 3 \cdot 2 \cdot x^2 + 3 \cdot 2^2 \cdot x + 2^3 &= (x + 2)^3 = (x - (-2))^3 = 0 \\ x_{1,2,3} &= -2 \end{aligned}$$

On a une racine triple. Souvent les équations incomplètes sont facile à factoriser :

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= (x - 1)(x + 1) = 0 \\ \left(\frac{x}{a} - b\right)^2 - 1 &= 0 \implies x = a(\pm\sqrt{1} + b) \\ x^2 - 2x &= x(x - 2) = 0 \\ x^3 - x^2 &= x^2(x - 1) = 0 \\ x^3 - x &= x(x^2 - 1) = x(x - 1)(x + 1) = 0 \\ x^4 - x^2 &= x^2(x^2 - 1) = x^2(x - 1)(x + 1) = 0 \end{aligned}$$

18.1 Equation degré 1

Pour le degré 1 la résolution est quasiment immédiate et ne présente aucune difficulté !

$(a+b)^n$, $n=1, 2, 3, 4, 5$ etc

Δ Pascal

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & & \\ & & 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

les 4 trucs qu'on va utiliser

$$\begin{aligned} (a+b)^1 &= a+b \\ (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \end{aligned}$$

On aimerait résoudre les équations du genre (pour des cas) :

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$$

\Downarrow

$$(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)(x-r_4)=0$$

où les solutions (3) sont r_1, r_2, r_3 et r_4

$n=1$ cas le plus général pr $n=1$

$y = ax + b = 0$

1 Solution
1 Racine !

donc équation :

$$ax + b = 0$$

$$x = \underline{\underline{-\frac{b}{a}}}$$

passage par zéro !

$(x - (-\frac{b}{a})) = 0$ $r_1 = \underline{\underline{-\frac{b}{a}}}$

$((-\frac{b}{a}) - (-\frac{b}{a})) = 0 \quad \checkmark$

18.2 Technique pour les équations de degrés supérieurs

On va voir qu'une technique très pratique est de réussir à transformer une équation générale X^n sous une forme où le terme X^{n-1} a disparu. On peut le faire au moyen d'un changement de variable du genre $Y = X + k$. L'équation obtenue s'appelle "forme dégénérée" de l'équation de départ.

18.3 Equation degré 2

On commence par des équations simples à résoudre puis on montre le début de la substitution $Y = X - k$

$n=2$

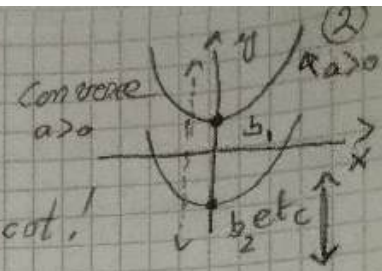
$$y = ax^2 + b$$

$$ax^2 + b = 0$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b}{a}}$$

Converger $a > 0$

pas cot.!



$$r_1 = +\sqrt{\frac{-b}{a}} \quad r_2 = -\sqrt{\frac{-b}{a}}$$

$$(x - (+\sqrt{\frac{-b}{a}}))(x - (-\sqrt{\frac{-b}{a}})) = 0 \quad \checkmark$$

ou

$$y = ax^2 + bx$$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(x + \frac{b}{a}) = 0 \quad \text{pas cot.} \checkmark$$

$$(x - (0))(x - (-\frac{b}{a})) = 0$$

$$r_1 = 0, \quad r_2 = -\frac{b}{a}$$

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{pas pas cot}$$

⚠️ stratégie pour $n > 1$:

Idee : faire disparaître le terme $n-1$ de l'équation n grâce à une substitution !

$n \geq 2$

$$aX^n + bX^{n-1} + \dots = 0$$

$$X = Y - K$$

$$aY^n + bY^{n-2} + \dots = 0$$

$$aX^2 + bX + c = 0 \quad Y = X - K$$

$$Y^2 + Y = 0 \quad \text{pas de } \underline{n-1} \quad Y$$

18.4 Equation degré 2, suite I

On va voir que si on substitue $Y = X + \frac{b}{2a}$ le terme en Y^1 disparaît !

Mais comment ? ③

on se souvient que $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \dots + b^n$
 $ay^n + by^{n-1} + \dots = 0$ etc

$Y = X - K$ on veut $y^2 + y = 0$

$aY^n + \frac{b}{a}Y^{n-1} + \dots = 0$ div par a

$(X-K)^n + \frac{b}{a}(X-K)^{n-1} + \dots = 0$

$(X-K)^2 + \frac{b}{a}(X-K) + \frac{c}{a} = 0$

$(X^2 - 2KX + K^2) + \left(\frac{b}{a}X - \frac{bK}{a}\right) + \frac{c}{a} = 0$

\downarrow
 $= 0, K = ?$

$-2KX + \frac{b}{a}X = 0$

$-2K = -\frac{b}{a}$

$K = \frac{b}{2a}$

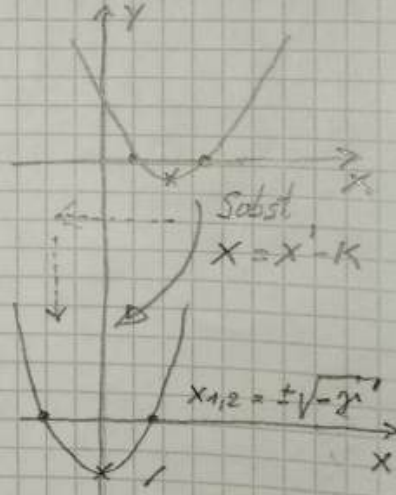
$\therefore Y = X - K = \left(X - \frac{b}{2a}\right)$

\Downarrow

$X^2 + K^2 - \frac{b}{a}K + \frac{c}{a} = X^2 + \left(K^2 - \frac{b}{a}K + \frac{c}{a}\right)$

$= X^2 + Y = 0$

$Y = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b}{a}\left(\frac{b}{2a}\right) + \frac{c}{a} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a^2} + \frac{c}{a} = -\frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}$



18.5 Equation degré 2, suite II

Ce que l'on veut montrer par là c'est qu'on a pas besoin de retenir les formules. Il suffit de retenir qu'il faut faire une substitution $Y = X - k$ et chercher k pour que Y^1 disparaisse ! On procédera de même pour le début de la résolution des équation des degrés supérieurs.

④

$$x^2 + y^1 \Rightarrow x^2 = -y$$

$$x^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\rightarrow y = x - k = \frac{\pm \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Résumé

$n < 2$: trivial

$n \geq 2$: $ax^n + bx^{n-1} + \dots = 0$

$n = 2$: $y = (x - k)$ où $k = f(a, b, \dots)$

$$\rightarrow ax^n + bx^{n-1} + \dots + \varepsilon = ax^2 + y^1 = 0 \quad (n=2)$$

① $\div a$:

$$x^n + \frac{b}{a}x^{n-1} + \dots = 0$$

② Subst. $y = (x - k)$.

où $k = f(a, b, \dots)$

$$ay^1 + y^0 = 0$$

où $a=1$ et $y^1 = f(k, a, b, \dots)$

$$= f(k(a, b, \dots), a, b, \dots)$$

$$= f(a, b, \dots)$$

$$\Rightarrow y = \pm \sqrt{-y^1}$$

et ② $y = x - k \Rightarrow$ $x = k + \left(\pm \sqrt{-y^1} \right) = f(a, b, \dots)$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

18.6 Equation avec un exposant fractionnaire

On ne parle pas vraiment d'équation polynomiale, mais on peut en résoudre certaines en faisant des substitutions. En effet si on fait $\sqrt{x} = u$ on pourra obtenir des équations polynomiale de degré plus élevé !

$$x + \sqrt{x} - 1 = 0$$

$$\sqrt{x} = u$$

$$u^2 + u - 1 = 0$$

18.6.1 Equation de degré 2 (x^2) avec un radical (\sqrt{x})

$$\sqrt{a-x} = a - x^2$$

Avec ce genre d'équations, il ne faut pas commettre l'erreur de tout élever au carré, car on se retrouverait avec une équation du 4ème degré. Prenons un exemple numérique :

$$\sqrt{a-x} = a - x^2$$

$$x^2 = a - \sqrt{a-x}$$

$$x = \pm \sqrt{a - \sqrt{a-x}}$$

$$x = \pm \sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a-x}}}$$

$$x = \sqrt{a-x}$$

$$x^2 = a-x$$

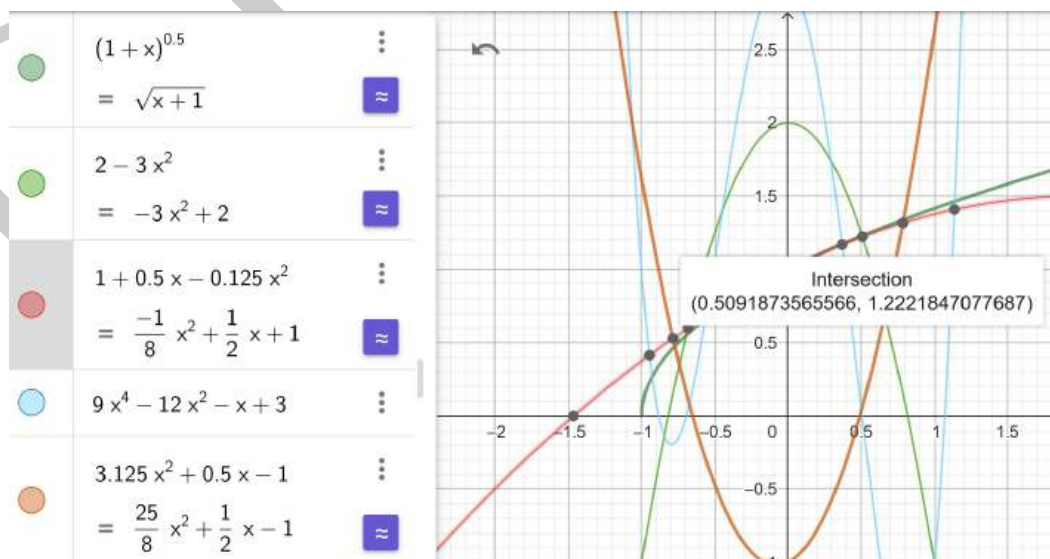
$$x^2 + x - a = 0$$

Equation du deuxième degré à résoudre pour x .

18.6.2 Approximation zéros d'une équation avec exposant fractionnaire

Si on élève au carré des deux côtés on devra résoudre une équation de degré 4. Par contre en remplaçant la racine carrée par un développement en série de puissance (binôme de Newton) on obtient une équation quadratique qui nous donne une approximation de des intersections des deux courbes, ce qui revient au même que dire de deux zéros de l'équation initiale.

$$\sqrt{1+x} = 2 - 3x^2$$



18.7 Equation degré 3

On va voir que si on substitue $Y = X - \frac{b}{3a}$ le terme en Y^1 disparaît ! Il est intéressant de noter que c'est à partir de ce degré 3 que les nombres complexes ont un rôle déterminant dans les calculs intermédiaires pour trouver les réponses même si ils n'apparaissent pas forcément dans les réponses finales. Cela leur confère donc une certaine "réalité", tout comme les autres nombres. Ils ne sont plus qu'une sorte "d'abstraction" comme dans le cas du discriminant négatif de l'équation quadratique.

Handwritten derivation for solving a cubic equation $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ using the substitution $x = y - K$.

Starting with $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, we divide by a to get $x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0$. We substitute $x = y - K$, where $K = \frac{b}{3a}$.

The resulting equation is $y^3 + py + q = 0$, where $p = 3K^2 - \frac{2b}{a}K + \frac{c}{a}$ and $q = -K^3 + \frac{b}{a}K^2 - \frac{c}{a}K + \frac{d}{a}$.

The final expressions for p and q are:

$$p = 3\frac{b^2}{3a^2} - 2\frac{b}{a}\frac{b}{3a} + \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 2b^2 + ac}{3a^2} = \frac{3ac - b^2}{9a^2}$$

$$q = -\frac{b^3}{3a^3} + \frac{b}{a}\frac{b^2}{3a^2} - \frac{c}{a}\frac{b}{3a} + \frac{d}{a} = \frac{-b^3 + 3b^3 - 3abc + 3ad}{3^3a^3} = \frac{2b^3 - 3abc + 3ad}{27a^3}$$

The roots are y_1, y_2, y_3 and $x_i = y_i - \frac{b}{3a}$.

https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89equation_cubique

18.8 Equation degré 4

Certaines équations de degré 4 sont très simples à résoudre au moyen d'une substitution :

$$x^4 + x^2 - 1 = 0$$

on pose $u = x^2$, on substitue et on résout comme une équation du deuxième degré,

$$u^2 + u - 1 = 0$$

et il y a des cas particuliers, équations bicarrées et équations symétriques. Mais il existe tout de même une méthode générale :

https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89equation_quartique

18.9 Equation degré 5, Théorème Abel

Le théorème d'Abel nous dit qu'il n'existe pas de méthode générale pour résoudre les équations de degrés supérieurs à 4. Il y a néanmoins des exceptions,

$$x^5 - x^4 - x^1 - 1 = 0$$

que l'on peut résoudre par factorisation en **radicaux** :

$$(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)^2 = 0$$

$$(x = \pm\sqrt{-1})(x = 1)(x = -1)(x = -1) = 0$$

Evariste Galois a trouvé des techniques pour savoir si une équation quintique peut être résolue au moyen de radicaux.

Voir : https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation_quintique

18.10 Equation degré 6

Comme on le sait (Théorème d'Abel), la plupart de ces équations ne peuvent pas être résolues au moyen de radicaux.

https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89quation_sextique

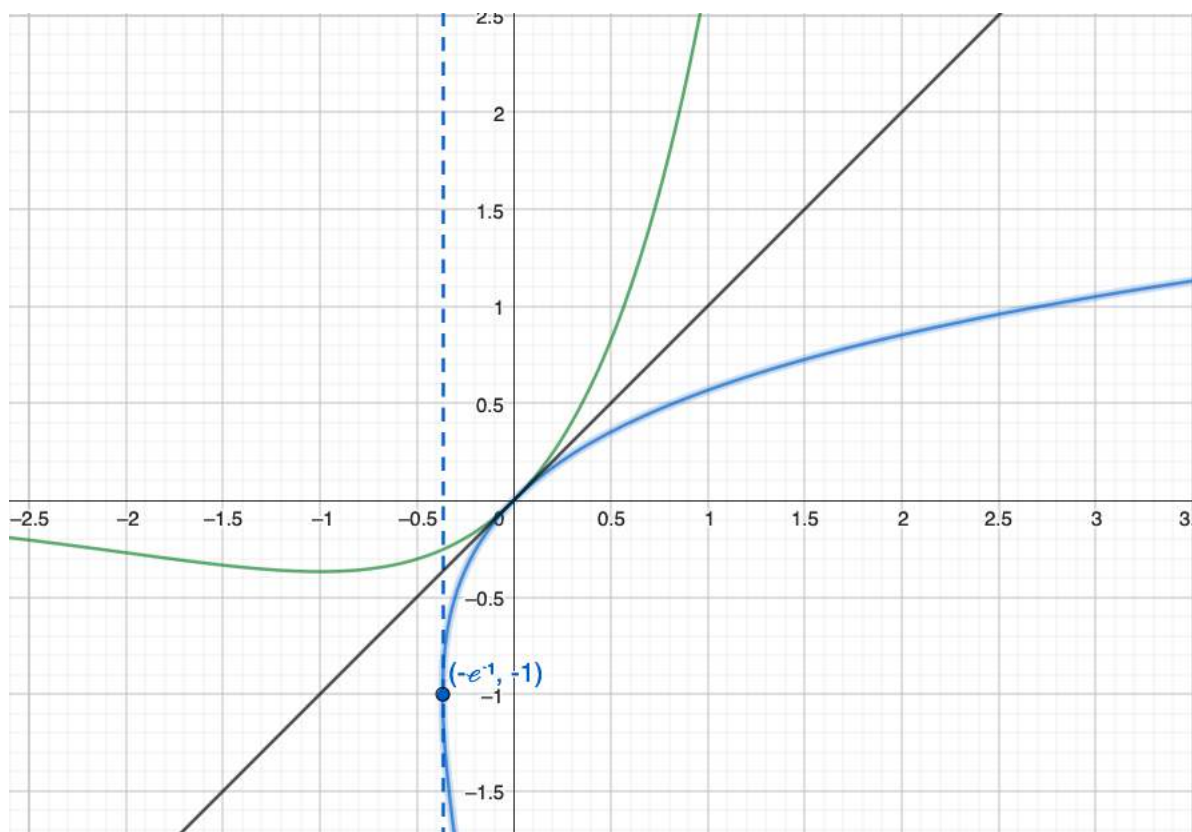
19 W : fonction de Lambert $x = W(x \cdot e^x)$

W, la fonction de Lambert (**en bleu**), aussi appelée fonction Oméga ou produit logarithmique est l'inverse de la fonction $f(x)$ définie par :

$$f(x) = xe^x$$

$$f^{-1}(x) = W(xe^x) = x$$

C'est un peu spécial mais c'est assez facile de trouver $f(x)$ (**en vert**). Voici les graphiques de $f(x)$ qui est une vraie fonction et $W(x)$ qui peut être représentée par deux fonctions.



Essayons avec de vrais valeurs :

$$0 \cdot e^0 = 0 \cdot 1 = 0$$

$$0.5 \cdot e^{0.5} = 0.5 \cdot 1.359 \approx 0.824$$

$$1 \cdot e^1 = 1 \cdot 2.718 = 2.718$$

Donc comme pour le logarithme, avec une table, on pourrait trouver f^{-1} . Elle est monotone et croissante. Si on a une fonction $z(x)$ à la place de x , on peut simplement faire un changement de variable. Ainsi :

$$f(x) = x^2 \cdot e^{x^2} = 0.824 = f(z(x))$$

$$f^{-1}(f(x^2)) = W((x^2)e^{x^2}) = W(0.824) = z$$

Note : on ne prend que la branche partant de $-1/e$ et allant vers les y positifs de $W(z)$. Par contre on voit qu'il y a deux solutions pour x !

$$x^2 = W(0.824) \implies x = \pm \sqrt{W(0.824)} = \pm \sqrt{0.5} = \pm \frac{1}{2}$$

https://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_W_function

20 Fonction de Lambert et équations transcendantes

Si l'inconnue apparaît dans la base d'une puissance et dans l'exposant, dans certains cas on peut trouver les solutions au moyen de la fonction de Lambert. Ainsi, la fonction de Lambert est utile lors de la résolution de certaines équations contenant des exposants et/ou des logarithmes. On appelle souvent ces équations, **équations transcendantes**.

$$\frac{1}{x} - \frac{x}{3}e^{x^2} = 0$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{e^{x^2}}{3}$$

Pour voir les solutions, on peut tracer séparément la fonction de chacun des membres :

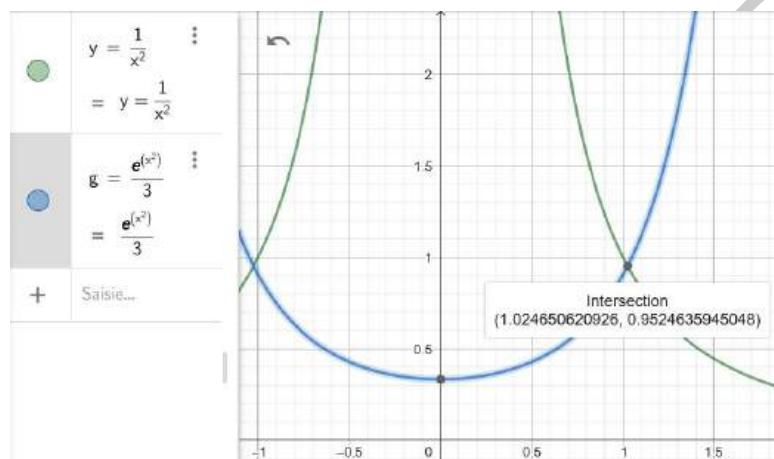


Figure 48: Exemple résolution équation avec W

Attention e^{x^2} n'est pas égale à $e^x e^x = e^{2x} = (e^x)^2$, sa croissance est beaucoup plus rapide. Dans Wolfram mettre **product log (3)** !

$$x^2 e^{x^2} = 3$$

$$W(x^2 e^{x^2}) = x^2 = W(3)$$

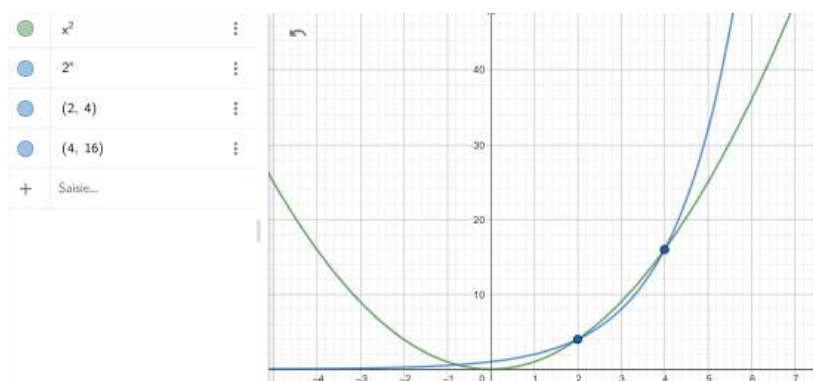
$$x^2 = W(3)$$

$$x = \sqrt{W(3)} \approx \pm \sqrt{1.0499} \approx \pm 1.0246$$

Méthode idem pour trouver y dans $x = -\ln(y)y \implies e^x = e^{-\ln(y)y}$ (voir origine du nom "produit logarithmique")

20.1 W : fonction de Lambert $a^x = x^b$

On trace les fonctions de gauche et de droite et on voit qu'il y a trois intersections, donc trois racines réelles :



$$2^x = x^2$$

Commençons par travailler dans l'ensemble des nombres réels. Dans ce cas x^2 est toujours positif, il faut donc mettre une valeur absolue dans le logarithme.

$$x \ln(2) = 2 \ln(|x|)$$

Cas numéro 1 : $x > 0$ (on peut enlever la valeur absolue) :

$$x^{-1} \ln(x) = 2^{-1} \ln(2)$$

$$e^{\ln(x^{-1})} \ln(x) = \frac{1}{2} \ln(2)$$

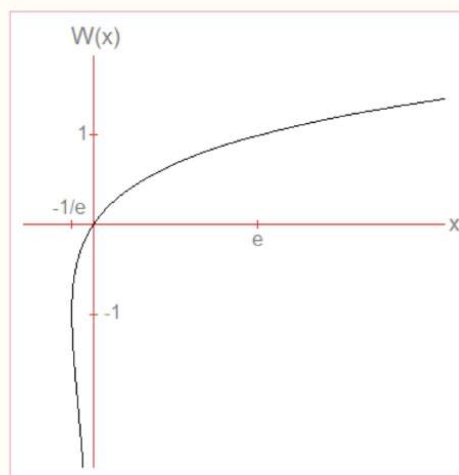
$$\ln(x) e^{-\ln(x)} = \ln(\sqrt{2})$$

$$-\ln(x) e^{-\ln(x)} = -\ln(\sqrt{2})$$

$$-\ln(x) = W(-\ln(x) e^{-\ln(x)}) = W(-\ln(\sqrt{2}))$$

$$-\ln(\sqrt{2}) \approx -0.346573$$

Pour obtenir deux bijections (deux fonctions) on coupe W en deux branches, W_0 qui va vers les y croissants et W_1 qui va vers les y décroissants (à partir de $-1/e$).



On obtient donc deux réponses :

$$x = e^{-W_0(-\ln(\sqrt{2}))} = e^{-W_0(-0.3465)} = e^{-(-0.693)} = 2$$

$$x = e^{-W_1(-\ln(\sqrt{2}))} = e^{-W_1(-0.3465)} = e^{-(-1.386)} = 4$$

Cas numéro 2 : $x < 0$ (on fait la négation de x dans le logarithme) :

$$x^{-1} \ln(-x) = 2^{-1} \ln(2)$$

$$e^{\ln(x^{-1})} \ln(x) = \frac{1}{2} \ln(2)$$

$$\ln(x) e^{-\ln(x)} = \ln(\sqrt{2})$$

$$-\ln(x) e^{-\ln(x)} = -\ln(\sqrt{2})$$

$$-\ln(x) = W(-\ln(x) e^{-\ln(x)}) = W(-\ln(\sqrt{2}))$$

$$\ln(\sqrt{2}) \approx 0.346573$$

$$x = -e^{-W_0(\ln(\sqrt{2}))} = -e^{-W_0(0.3465)} = -e^{-0.265} = -0.767$$

A finir <https://www.had2know.org/academics/lambert-w-function-calculator.html>

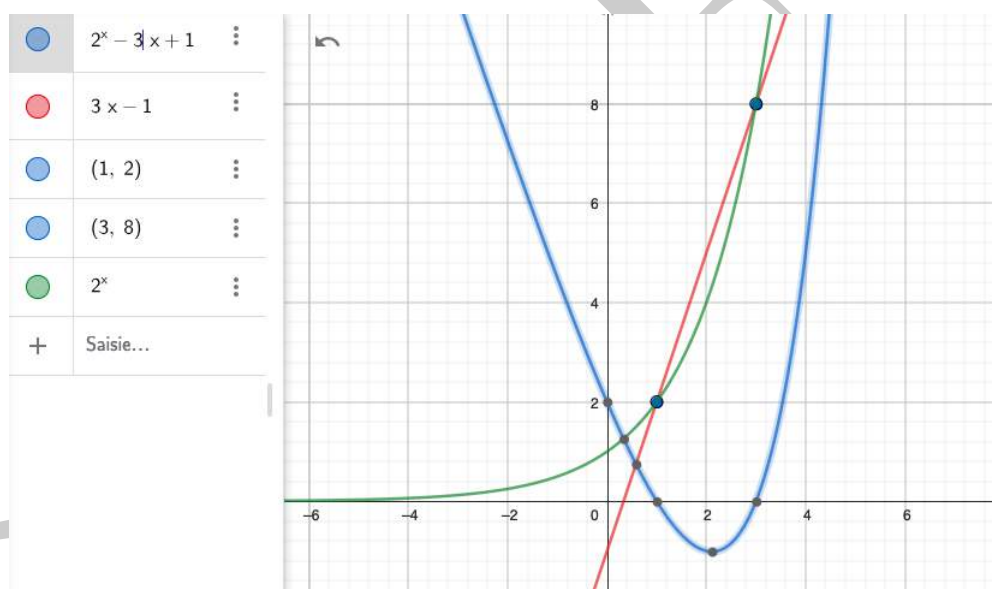
20.2 W : fonction de Lambert $a^x + bx + c = 0$

Pour tracer les courbes des deux membres pour se faire une idée des solutions réelles :

$$a^x = -(bx + c)$$

Soit avec de vrais nombres,

$$2^x = -(-3x + 1)$$



On va essayer avec la fonction de Lambert,

$$e^{x \ln(a)} = -(bx + c)$$

$$(e^{x \ln(a)} = -(bx + c)) e^{-x \ln(a)}$$

$$1 = (-bx - c) e^{-x \ln(a)}$$

corriger le terme en bx ,

$$(1 = (-bx - c) e^{-x \ln(a)}) \frac{\ln(a)}{b}$$

$$\frac{\ln(a)}{b} = (-x \ln(a) - \frac{c \ln(a)}{b}) e^{-x \ln(a)}$$

tenir compte de c ,

$$\left(\frac{\ln(a)}{b} = (-x \ln(a) - \frac{c \cdot \ln(a)}{b}) e^{-x \ln(a)} \right) e^{-\frac{c \cdot \ln(a)}{b}}$$

Appliquer $W(z)$, **Modifier la taille des textes dans les formules**

Voir : https://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_W_function

<https://www.youtube.com/watch?v=rxVK5cWLRKQ>

20.3 W : fonction de Lambert $x^x + c = 0$

Exercice intersection de x^x avec une droite horizontale : $x^x = 2$, ma méthode,

$$\ln(x^x) = \ln(2)$$

$$\ln(u^u) = \ln(2)$$

$$u \ln(u) = \ln(2)$$

$$u = e^x$$

$$e^x \ln(e^x) = \ln(2)$$

$$xe^x = \ln(2)$$

$$x = W(\ln(2))$$

$$u = e^{W(\ln(2))}$$

BpRp le fait d'une façon plus compliquée, pourquoi ? Son approche permet de mieux vérifier qu'on a bien compris comment travailler avec f et f^{-1} .

<https://www.youtube.com/watch?v=WWyMRmV1hLg>

20.4 W : fonction de Lambert $e^x = \ln(x)$

Seulement solutions dans les complexes, à voir !

<https://www.youtube.com/watch?v=EMu-kYY5rdE>

https://www.youtube.com/watch?v=CzzUo8wg_iw

20.5 W : fonction de Lambert $e^{x-a} = \ln(x)$

Avec un décalage on peut faire se toucher en un point, la tangente. On utilisera donc la **dérivée** pour résoudre le problème et c'est un problème que je cherchais à résoudre. Essayer encore avec ma méthode de substitution. A revoir et à voir !

Propriété selon BpRp, à vérifier

$$x = e^{W(1)} = \frac{1}{W(1)}$$

<https://www.youtube.com/watch?v=Pijk9dAiAu8>

https://www.youtube.com/watch?v=EjUp_5X6io4 Newton method and omega

20.6 Autres équations

Racine et degré 2,

$$\sqrt{5-x} = (5-x^2)$$

ou de façon plus générale :

$$\sqrt{k-x} = (k-x^2)$$

$$\sqrt{16-x^2} - \sqrt{9-x^2} = 5$$

et d'autres :

$$y^x = x^y$$

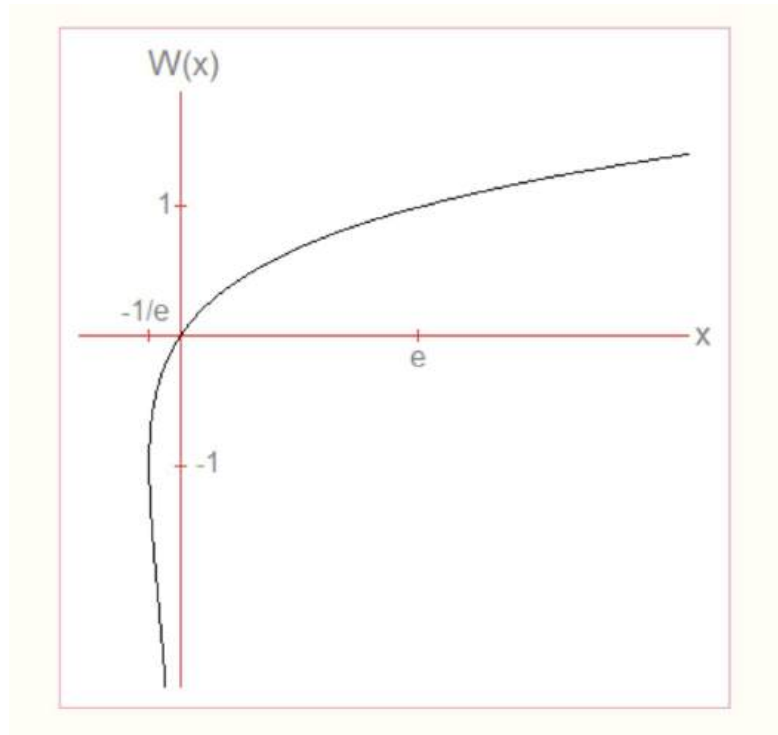
$$y^x - x^y = 0$$

$$x^x = x^3$$

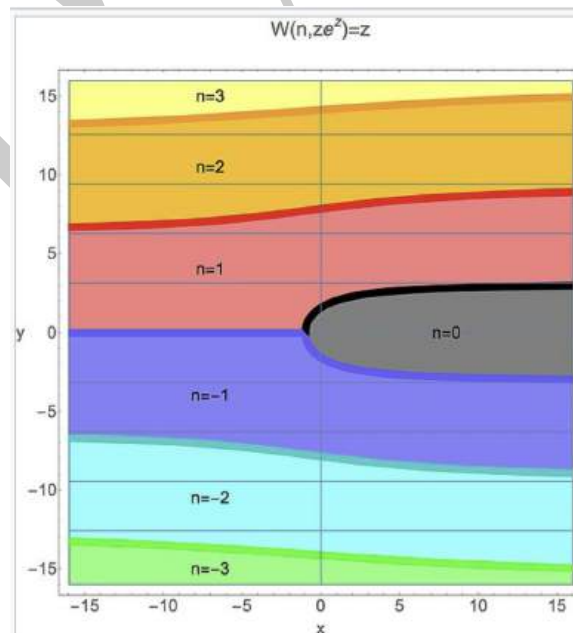
20.7 W : branches fonction de Lambert $z = W(n, z \cdot e^z)$

Jusqu'à présent on s'est intéressé qu'aux branches $n = 0$ et $n = -1$.

To make the Lambert W function a true function, mathematicians split it into two branches, both of which are one-to-one. $W_0(x)$ denotes the upper part of the Lambert function whose domain is $-1/e, \infty$ and range $-1, \infty$. $W_{-1}(x)$ denotes the lower part of the Lambert function whose domain is $-1/e, 0$ and range $\infty, -1$.



Voir : <https://www.had2know.org/academics/lambert-w-function-calculator.html>



21 Manipulations algébriques et approximations

21.1 Méthode d'interpolation et extrapolation, approximations

21.1.1 Binôme de Newton

$$(a + b)^n = a^n b^0 + \frac{n!}{(n-k)!(k)!} a^{n-1} b^1 + \dots$$

$$(a + b)^n = a^n b^0 + \frac{n}{1!} a^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \dots$$

Particulièrement intéressant lorsque un des deux termes vaut 1 !

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots$$

Surtout pour toute approximation linéaire avec x très petit devant 1 :

$$(1 + x)^n = 1 + nx$$

Ce genre d'approximation permet de résoudre les équations dynamiques telles que celles du pendule qui sont pourtant parmi les plus simples et qui n'auraient pas de solutions triviales sans cette simplification.

21.1.2 Série de Taylor (à ajouter : autres formes, Mac-Laurin etc.)

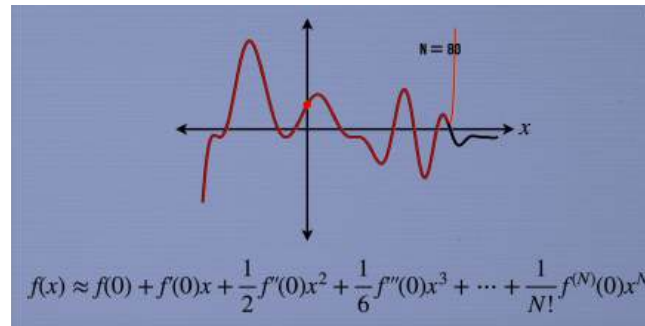
$$f(x) \approx f^{(0)}(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

soit

$$f(x) \approx C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3 + \dots$$

ou

$$C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

Ci-dessous, $a = 0$, 'série de Mac-laurin', il faut 80 termes pour arriver à cette approximation !Calcul des constantes C_n :

$$f^{(0)}(x) \approx T_{m=3, x_0=a}^{(0)} = C_0(x-a)^0 + C_1(x-a)^1 + C_2(x-a)^2 + C_3(x-a)^3$$

$$f^{(0)}(a) \approx T_{m=3, x_0=a}^{(0)} = C_0 + C_1(a-a)^1 + C_2(a-a)^2 + C_3(a-a)^3$$

$$f^{(0)}(a) = T_{m=3, x_0=a}^{(0)} = C_0 + 0 + 0 + 0$$

$$C_0 = f(a)$$

$$f^{(1)}(x) \approx T_{m=3, x_0=a}^{(1)} = 0 + 1C_1 + 2C_2(x-a)^1 + 3C_3(x-a)^2$$

$$f^{(1)}(a) \approx T_{m=3, x_0=a}^{(1)} = 0 + 1C_1 + 2C_2(a-a)^1 + 3C_3(a-a)^2$$

$$f^{(1)}(a) \approx T_{m=3, x_0=a}^{(1)} = 0 + 1C_1 + 0 + 0$$

$$C_1 = \frac{f^{(1)}(a)}{1!}$$

$$f^{(2)}(x) \approx T_{m=3, x_0=a}^{(2)} = 0 + 0 + 1 * 2C_2 + 2 * 3C_3(x-a)^1$$

$$f^{(2)}(a) \approx T_{m=3, x_0=a}^{(2)} = 0 + 0 + 1 * 2C_2 + 2 * 3C_3(a-a)^1$$

$$f^{(2)}(a) \approx T_{m=3, x_0=a}^{(2)} = 0 + 0 + 1 * 2C_2 + 0$$

$$C_2 = \frac{f^{(2)}(a)}{2!}$$

$$f^{(3)}(x) \approx T_{m=3, x_0=a}^{(3)} = 0 + 0 + 0 + 1 * 2 * 3C_3$$

$$f^{(3)}(a) \approx T_{m=3, x_0=a}^{(3)} = 0 + 0 + 0 + 1 * 2 * 3C_3$$

$$f^{(3)}(a) \approx T_{m=3, x_0=a}^{(3)} = 0 + 0 + 0 + 1 * 2 * 3C_3$$

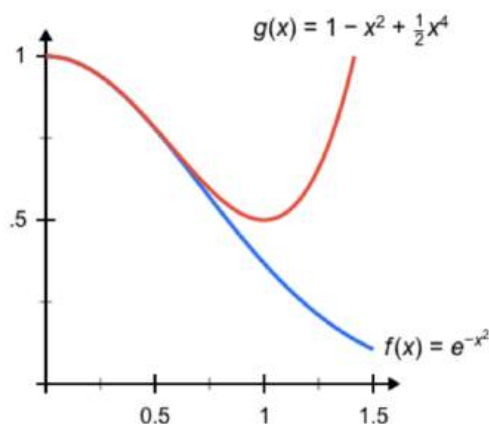
$$C_3 = \frac{f^{(3)}(a)}{3!}$$

21.1.3 Approximation de l'intégrale de la fonction normale

On ne peut pas intégrer facilement la fonction normale (calcul de probabilité). Par contre on trouve facilement un approximation par Taylor qui peut être intégrée sans problème :

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

for all x , too.



From the plot, it looks like just the first three terms

$$\frac{(-1)^0 x^0}{0!} + \frac{(-1)^1 x^2}{1!} + \frac{(-1)^2 x^4}{2!} = 1 - x^2 + \frac{1}{2} x^4$$

$$e^{x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{1}{2} x^4$$

idem avec variance explicité etc.

21.1.4 Approximation de Padé

Lorsque x devient grand la valeur de $y(x)$ converge vers le rapport de deux polynômes, une constante, asymptote etc. Les séries de Taylors s'avèrent insuffisantes pour ce genre d'extrapolation.

$$y(x) \approx \frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots + A_n x^n}{1 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \dots + B_n x^n}$$

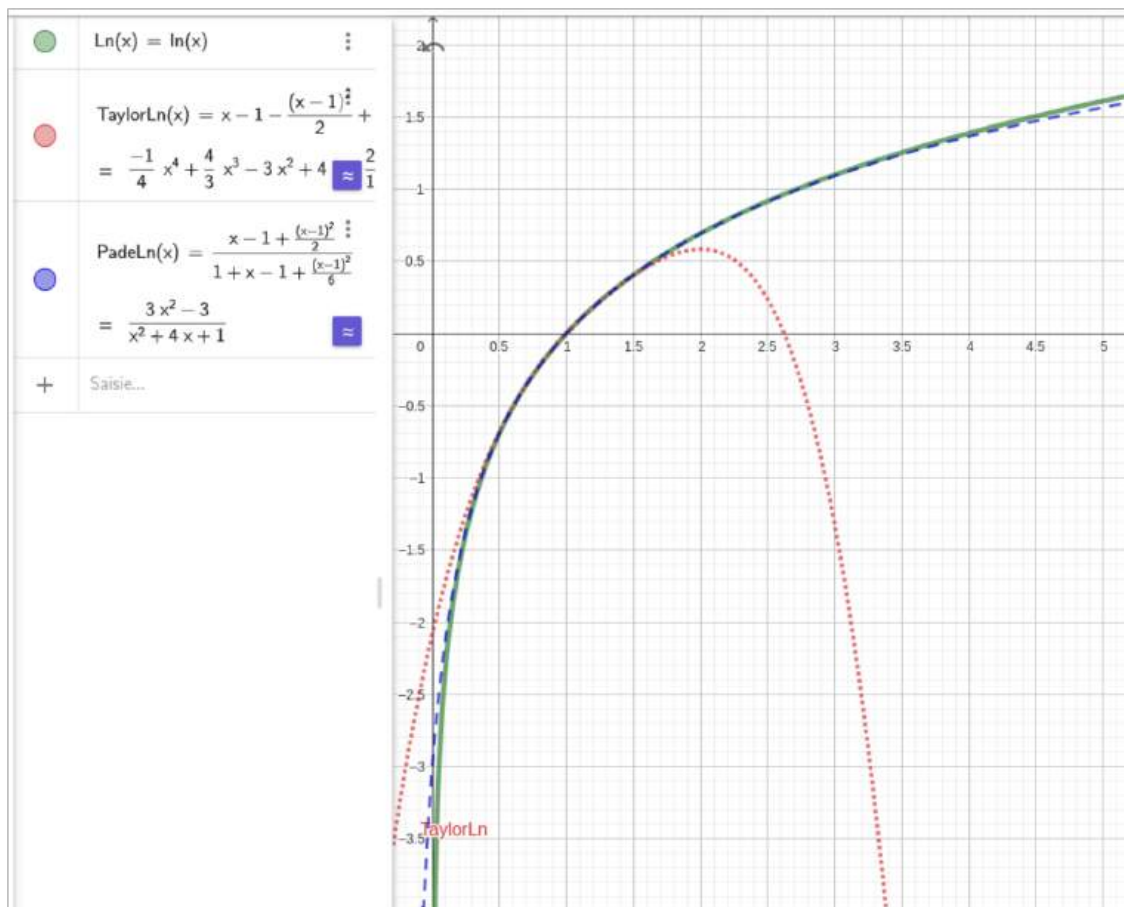
En premier lieu il faut calculer la série de Taylor associée à la $f(x)$ puis on ajoute l'approximant de Padé, on égalise et on cherche les termes par identification.

$$y(x) \approx \frac{A_0 + A_1 x + A_2 x^2}{1 + B_1 x + B_2 x^2} = f^{(0)}(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!} (x) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!} (x)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} (x)^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!} (x)^4$$

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 = (1 + B_1 x + B_2 x^2) \left(f^{(0)}(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!} x + \frac{f^{(2)}(a)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} x^3 + \frac{f^{(4)}(a)}{4!} x^4 \right)$$

21.1.5 Comparaison fonction $\ln(x)$, Taylor et Padé

Taylor est une bonne approximation entre 0.4 et 1.7, après elle diverge très vite.



Le domaine de Padé est bien meilleur (de 0.1 à 12 on a moins de 10% d'erreur. Après elle converge vers une asymptote horizontale mais au moins elle reste positive !



21.2 Approximation énergie particule

Rappels : https://fr.wikipedia.org/wiki/Hypoth%C3%A8se_de_de_Broglie

Energie particule : (non-rel. $p = \frac{p^2}{2m}$; relativistic? $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$)

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$$

si masse non nulle et donc $v < c$:

$$p = mv$$

sinon :

$$p = \frac{h}{\lambda_{phase}} = \frac{h}{\frac{c}{n}T} = \frac{nhf}{c}$$

et dans le vide $n=1$:

$$E^2 = (pc)^2 = (hf)^2$$

Dans ce qui suit on demande de prouver un résultat en partant d'une équation et en faisant une approximation linéaire de la solution (m non nulle et v plus petit que c).

Prouver que :

$$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2 \Rightarrow E \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

au moyen de deux méthodes (Binôme de Newton et série de Taylor) et en se limitant au terme linéaire ! Le symbole 'm' représente la masse au repos, souvent notée 'mo'. On commence par résoudre la partie commune aux deux méthodes avec la vitesse relativiste :

$$\begin{aligned} E^2 &= (mc^2)^2 + (pc)^2 = \\ &= (mc^2)^2 + (mvc)^2 = \\ &= m^2c^4 + m^2v^2c^2 = \\ &= m^2c^4 + m^2\left(\frac{v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)^2c^2 = \\ &= m^2c^4 + m^2c^2\left(\frac{v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) = \\ &= m^2c^4 + m^2c^4\left(\frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) = \\ &= m^2c^4\left(1 + \frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) \end{aligned}$$

On pose $u = \frac{v^2}{c^2}$

$$\begin{aligned} E^2 &= m^2c^4\left(1 + \frac{u}{1-u}\right) = \\ &= m^2c^4\left(\frac{1-u+u}{1-u}\right) = \\ &= m^2c^4\left(\frac{1}{1-u}\right) = m^2c^4(1-u)^{-1} \end{aligned}$$

donc,

$$E = mc^2(1-u)^{-\frac{1}{2}}$$

on va faire une approximation de la parenthèse de droite selon deux méthodes :

Binôme de Newton :

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n b^0 + \frac{n!}{(n-k)!(k)!} a^{n-1} b^1 + \dots \\ (a+b)^n &= a^n b^0 + \frac{n}{1!} a^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3} b^3 + \dots \end{aligned}$$

$$(a + b)^n = (1 - u)^{-\frac{1}{2}}$$

$$(1 - u)^{-\frac{1}{2}} = 1^n u^0 + \frac{n}{1!} 1^{n-1} u^1 + \frac{n(n-1)}{2!} 1^{n-2} u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} 1^{n-3} u^3 + \dots$$

$$(1 - u)^{-\frac{1}{2}} = 1 + nu + \frac{n(n-1)}{2!} u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} u^3 + \dots$$

$$(1 - u)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)u + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right)}{2!} u^2 + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\left(-\frac{1}{2}\right) - 1\right)\left(\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\right)}{3!} u^3 + \dots$$

$$(1 - u)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 - \frac{15}{48}u^3 + \dots$$

Série de Taylor :

$$f(u) = (1 - u)^{-\frac{1}{2}} \approx f(1) + \frac{f^{(1)}(1)}{1!} (-(u-1)) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!} (-(u-1))^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!} (-(u-1))^3 + \dots$$

$$C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(1)$$

$$C_n = \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2} - (n-1)\right) (1-1)^{\left(-\frac{1}{2}\right) - n}$$

à suivre Approximation de Padé

22 Méthodes numériques, implémentation série Taylor en Python 2

Dans le répertoire C:\Users\ejsmu\Dropbox\work\ipython_py2\funcz
Voir lnz.py

DRAFT

23 Les équations différentielles

Voici une étude détaillée du comportement d'un circuit électrique comportant un condensateur pré-chargé ainsi que d'une résistance et d'une source de tension. Un interrupteur change la topologie du circuit au temps $t=0$ (connexion de la source via le switch).

Ce circuit est régi par une équation différentielle du 1er ordre. On va analyser en détails l'aspect physique et mathématique. En électricité et plus généralement en physique, la variable dépendante (fonction) que l'on cherche, représente une grandeur caractéristique d'un composant du système, qui varie au cours du temps (tension condensateur, vitesse masse M etc.).

23.1 Equations linéaires du 1er ordre : problème de Cauchy

On peut résumer le type d'équation de la manière suivante :

$$F[u(t)', K(t)u(t), us(t)] = 0$$

$$u(0) = A1$$

Le problème de Cauchy consiste donc en une équation contenant des variables et leurs dérivées ainsi que des conditions initiales $u(0)$, $u'(0)$ ou alors des conditions aux limites (géométrie du condo) selon le type de problème $u(0)$, $u(\infty)$. Dans notre cas il y a qu'une condition initiale/limite car le système est du 1er ordre. La notation $uR(0-)$ indique la valeur au temps 0, juste avant que l'on ferme l'interrupteur. $uR(0+)$ indique la valeur juste après la fermeture. Ceci permet de spécifier une discontinuité du signal (Ce qui est un cas limite théorique).

Il y a autant de conditions initiales que de variables d'état.

En isolant à gauche la dérivée de la variable d'état on peut réécrire l'équation sous forme d'équation aux différences (résolution numérique).

$$u(t)' = G[K(t)u(t), us(t)]$$

En approchant la dérivée au point $t1$ on obtient la forme explicite.

$$\frac{u(t2) - u(t1)}{(t2 - t1)} = G[K(t1)u(t1), us(t1)]$$

En approchant la dérivée au point $t2$ on obtient la forme implicite dont il faut trouver la valeur à l'aide d'une méthode numérique genre Newton-Raphson si l'équation est non-linéaire (On montrera un exemple plus loin).

$$\frac{u(t2) - u(t1)}{(t2 - t1)} = G[K(t2)u(t2), us(t2)]$$

23.2 Equations linéaires du 1er ordre SSM, séparations variables I

Forme : $y' + k(x)y = 0$ ou $dy + yk(x)dx = 0$

Solution (on va voir d'où vient l'exponentielle avec sa constante multiplicative que l'on rencontre si souvent ! **Par contre problème de la disparition de la valeur absolue :**

$$\begin{aligned}\frac{dy}{y} &= -K(x)dx \\ \int \frac{dy}{y} &= - \int K(x)dx \\ \ln(|y|) + A &= - \int K(x)dx \\ e^{\ln(|y|)+A} &= e^{- \int K(x)dx} \\ y &= e^{- \int K(x)dx} e^{-A} \\ y_h &= C_h e^{- \int K(x)dx}\end{aligned}$$

23.3 Equations linéaires du 1er ordre SSM, ...

Forme : $\frac{dy}{y} = k(x)dx$ ou $y' \frac{1}{y} = k(x)$

23.4 Equations linéaires du 1er ordre SSM, séparations variables II

Forme : $y'y + k(x) = 0$ ou $ydy + k(x)dx = 0$

23.5 Equations linéaires du 1er ordre ASM, variation des constantes

On a vu que l'équation homogène de la forme :

$$y' + K(x)y = 0$$

a pour solution

$$y_h = C_h e^{- \int K(x)dx}$$

Avec un second membre on a

$$y' + K(x)y = S(x)$$

L'idée est d'utiliser la solution de l'équation homogène $y_h = C_h e^{- \int K(x)dx}$ sans la constante (on en tiendra compte plus tard), donc sous la forme $y_h = e^{- \int K(x)dx}$ et de supposer que la solution de l'équation non-homogène est $y_g = C(x)y_h$.

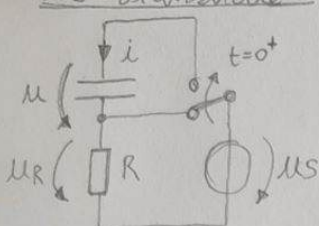
On injecte y_g dans l'équation, une partie qui contient y_h va se simplifier étant donné qu'elle vaut zéro et on trouvera $C(x)$ par intégration. On obtient la formule générale suivante :

$$y_g = C(x)y_h = \left(\int \frac{S(x)}{y_h} dx + A \right) y_h$$

23.5.1 Méthode analytique simple :

020622

RC Transitoire I Calculer $u_R(t)$



Conditions initiales

$$u(0^-) = 5V = u(0^+)$$

$$u_S(0^-) = u_S(0^+) = 3V$$

$$u_R(0^-) = u_S(0^-) = \underline{5V(I)}$$

Equation condo : $i = C \frac{du}{dt} = C u'$

$t=0^+$ $\sum u = 0$; $u + u_R - u_S = 0$
Lois de Kirchhoff

$$u + i \cdot R - u_S = 0$$

$$u + RC u' - u_S = 0$$

Resolution analytique

$$u' + \frac{1}{RC} u = \frac{1}{RC} u_S$$

Source Excitation

$f(u', k_1 u, k_2) = 0$ asm

Equation différentielle linéaire du 1^{er} ordre valable à partir de $t=0^+$ ($t > 0$)

variable d'état u (A)

$$u' = -\frac{1}{RC} u$$

Equ. Hom.

$$1) u' + \frac{1}{RC} u = 0$$

$$\Rightarrow u = C e^{-\int \frac{1}{RC} dt} \Rightarrow (A) C e^{-\frac{t}{RC}} = u_h$$

détails $\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} u = 0$

variable d'état u (B)

$$u' = -\frac{1}{RC} u + \frac{1}{RC} u_S$$

Figure 49: Démonstration formule IV

On pose l'équation sous la forme suivante :

$$u' + \frac{1}{RC} u = \frac{1}{RC} u_S$$

On la simplifie pour obtenir ce que l'on appelle l'équation homogène :

$$u' + \frac{1}{RC} u = 0$$

Avec la formule suivante on obtient la solution homogène :

$$Y_{hom} = C e^{-\int \frac{1}{RC} dt}$$

$\Rightarrow u = C e^{-\int \frac{1}{RC} dt} \Rightarrow \textcircled{1} C e^{-\frac{t}{RC}} = u_h$

2) avec second membre

$u' + \frac{1}{RC} u = \frac{1}{RC} u_s$

$y_p = K(t) \cdot y_h$ Solution particulière (générale)

$K \cdot y_h + K \cdot y_h' + \frac{1}{RC} K \cdot y_h = \frac{1}{RC} u_s$

$K(y_h' + \frac{1}{RC} y_h) + K' y_h = \frac{1}{RC} u_s$

0 car sol. hom.

$\Rightarrow K' y_h = \frac{1}{RC} u_s \Rightarrow K' = \frac{u_s}{RC y_h}$

$K = \int \frac{u_s}{RC y_h} dt + A \Rightarrow \textcircled{2} y_p = \left[\int \frac{u_s}{RC y_h} dt + A \right] \cdot y_h$

$u_p = \left[\int \frac{u_s}{RC} \cdot C^{-1} e^{\frac{t}{RC}} dt + A \right] C e^{-\frac{t}{RC}}$

$= \left[\frac{u_s}{RC} C^{-1} \cdot RC e^{\frac{t}{RC}} + A \right] C e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{u_s}{RC} + A e^{-\frac{t}{RC}} = u(t)$

détails $\frac{du}{dt} + \frac{1}{RC} u = 0$
 $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{RC} u$
 $\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dt}{RC}$
 $\ln|u| + K = -\frac{1}{RC} t$
 $e^{\ln|u|} \cdot e^K = e^{-\frac{t}{RC}}$
 $|u| = e^{-K} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = C e^{-\frac{t}{RC}}$

$y_h = u_h$ de $\textcircled{1}$

Figure 50: Démonstration formule IV

une fois qu'on a la solution homogène on reprend l'équation complète :

$$u' + \frac{1}{RC} u = \frac{1}{RC} u_s$$

et on cherche la solution générale

$$Y_{part} = Y_{hom} \left(\int \frac{\frac{1}{RC} u_s}{Y_{hom}} dt + A \right)$$

Il n'y a qu'à procéder par identification. Attention on est vite limité car les intégrales sont rapidement incalculables aux moyens de radicaux.

Ainsi tout va bien lorsque les coefficients de u vaut $\frac{1}{RC}$, mais il suffit d'avoir à la place une fonction un peu plus compliquée et ça devient plus compliqué (voir exemple page 138 [intro analyse numérique]). On a un peu plus de liberté avec l'excitation (exemple avec $3t$). (voir les familles de fonctions qui peuvent être envisagée trigo, cosh etc.)

En fait les problèmes d'intégration surviennent lorsqu'on a des relations en x un peu compliquées qui multiplient y et qui sont présentes en même temps au second membre. Par contre le second membre peut être assez compliqué si on a Ky ou K est une constante. De même l'équation sans second membre permet de $K(x)y$ assez compliqués.

$y' + yy = 0$ est non linéaire mais donne un résultat en $1/x$

Si l'équation n'est pas linéaire en u , on peut avoir 0, 1 ou plusieurs solutions.

Pour l'obtention des formules voir les détails dans les développements dans les figures ci-dessus. Résolution laplace, fourier, convolution transfo z , feynman semi implicite

J'ai des problèmes avec l'intégrale placée en exposant....

DRAFT

23.5.2 Prise en compte de la condition initiale :

Au moment où le switch se ferme, un courant circule immédiatement dans le condo (discontinuité autorisée pour le courant du condo), ce qui fait chuter la tension de 2V. C'est presque la réalité.....

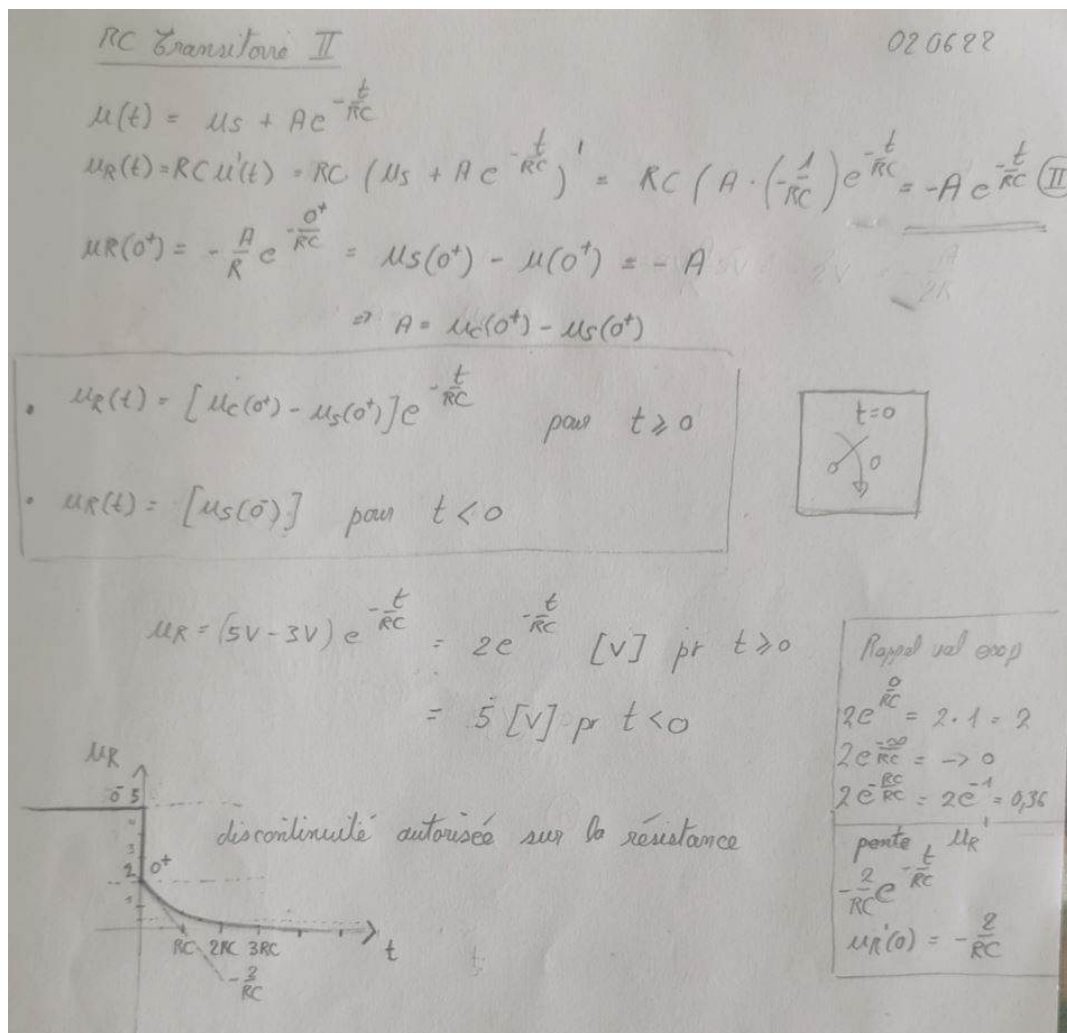


Figure 51: Démonstration formule IV

23.5.3 Plot décharge condensateur :

24 Equations aux dérivées partielles

24.1 Three Important equations

DRAFT

Three Important Equations

5

5.1 INTRODUCTION

Partial differential equations (PDEs) are extremely important in both mathematics and physics. A major purpose of this text is to give an introduction to some of the simplest and most important PDEs in both disciplines, and techniques for their solution. Accordingly, we focus on three equations:

1. the heat equation

$$\frac{\partial u(t, \hat{x})}{\partial t} = \kappa \Delta u(t, \hat{x})$$

2. the wave equation

$$\frac{\partial^2 u(t, \hat{x})}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta u(t, \hat{x})$$

3. Laplace's equation

$$\Delta u(x, y) = 0.$$

It would appear that we are severely limiting ourselves by examining only three equations. However, these encompass any PDE of the form

$$A \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + B \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

because, via a linear transformation of variables, any equation of the form of Eq. (1) can be transformed into one of the three equations. We show at the end of the section that the transformation is exactly the same as transforming an equation of the form

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0 \quad (2)$$

into the standard form of a parabola, hyperbola, or an ellipse by a rotation of axes according to the sign of $B^2 - 4AC$. Following the nomenclature of the geometrical

figures, if $B^2 - 4AC < 0$ the PDE is said to be parabolic, if $B^2 - 4AC = 0$ the equation is elliptic, and if $B^2 - 4AC > 0$ the equation is hyperbolic. Thus the heat equation is the prototypical parabolic equation, the wave equation is the prototypical wave equation, and Laplace's equation is the prototypical elliptical equation. We shall see that for the heat equation, the initial conditions diffuse in time whereas in the wave equation initial conditions are propagated, changing position but not shape.

The Laplacian appears in each of these equations, and we begin by exploring the physical significance of that operator. Consider the heat equation. Here $u(t, x, y, z)$ is the temperature of a solid homogenous body at the point (x, y, z) at time t . Then $\frac{\partial u(t, x, y, z)}{\partial t}$ is the rate of change of the temperature at the point (x, y, z) . The temperature at (x, y, z) will undergo a change if and only if the temperature in the immediate vicinity at (x, y, z) is different than at (x, y, z) . We consider the case in one space dimension.

Suppose we want to compare the value of a function $f(x)$ with the average value of the function at $x + h$ and $x - h$; i.e., we compare $f(x)$ with $[f(x + h) + f(x - h)]/2$. How does $f''(x)$ enter in? By the definition of the second derivative

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(x-h)}{h}. \tag{3}$$

We use the second limit. Approximate $f'(x)$ and $f'(x-h)$ using

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

and

$$f'(x-h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h}.$$

Substitute the approximations into Eq. (3) to get

$$\begin{aligned} f''(x) &\approx \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f(x) - f(x-h)}{h}}{h} = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \\ &= \frac{2}{h^2} \left\{ \frac{1}{2} [f(x+h) + f(x-h)] - f(x) \right\}. \end{aligned}$$

Thus $f''(x)$ is a measure of the difference between the value of a function at a point and the average of the values of the function in the immediate vicinity.

5.2 LAPLACE'S EQUATION

The simplest second-order PDE is Laplace's equation, which in two variables is

$$\Delta u(x, y) = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Solutions to Laplace's equation are called harmonic functions, which play a key role in complex analysis. We review some facts from complex analysis that will be important for us.

An analytic function $f(x,y)$ is of the form

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

where $u(x,y)$ and $v(x,y)$ are harmonic functions. It is not true that any combination of two harmonic functions is an analytic function. For $f(x,y)$ to be analytic, $v(x,y)$ must be a harmonic conjugate of $u(x,y)$. This means $u(x,y)$ and $v(x,y)$ must satisfy the Cauchy–Riemann equations, which are

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

A domain in the complex plane is a connected open set. A simply connected domain is a domain with no holes. If D is a simply connected domain and $u(x,y)$ is a harmonic function, then the function $v(z)$ is defined by

$$v(z) = \int_{\gamma} u_x dy - u_y dx$$

for any path in D that connects z_0 and z is a harmonic conjugate of $u(x,y)$ and

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

is analytic in D . From complex analysis, we have the following result:

MAXIMUM MODULUS PRINCIPLE

If $f(z)$ is analytic and not constant on a domain D , then $|f(z)|$ does not attain its maximum on D . That is, the maximum of $|f(z)|$ on the closure of D is attained on the boundary of D .

Converse:

If $f(z)$ is analytic and not constant on a domain D and if $f(z) \neq 0$ on D , then $|f(z)|$ does not attain its minimum on D .

Proof:

Let $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. Then $g(z)$ is analytic and $|g(z)|$ does not attain its maximum on D .

Corollary:

If

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

is analytic and not constant on a domain D , then $u(x,y)$ does not attain its maximum on D .

Proof:

We have

$$\left| e^{f(z)} \right| = \left| e^{u(x,y)+iv(x,y)} \right| = \left| e^{u(x,y)} \right| \left| e^{iv(x,y)} \right| = e^{u(x,y)}$$

since

$$|e^{i\theta}| = 1 \quad \text{and} \quad |e^{u(x,y)}| = e^{u(x,y)}$$

and if $f(z)$ is analytic, then $e^{f(z)}$ is analytic.

EXERCISES

- Determine whether the following functions are harmonic:
 - $f(x, y) = x^2y - y^2x$.
 - $f(x, y) = x^3y - y^3x$.
 - $f(x, y) = e^x \sin y$.
 - $f(x, y) = \sin x - \cos y$.
 - $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.
 - $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.
- Show that $u(r, \theta) = \ln r$, $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$ is harmonic.
- Determine whether $u(r, \theta) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$, $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$ is harmonic.

5.3 DERIVATION OF THE HEAT EQUATION IN ONE DIMENSION

Before presenting the heat equation, we review the concept of heat. Energy transfer that takes place because of temperature difference is called heat flow. The energy transferred in this way is called heat. Thus heat refers to the transfer of energy, not the amount of energy contained within a system. An example of a unit of heat is the calorie. One calorie is the amount of heat required to raise 1 g of water from 14.5°C to 15.5°C.

The quantity of heat H required to raise a body of mass m from T_1 to T_2 is approximately proportional to $\Delta T = T_2 - T_1$, and is proportional to m . It is also dependent on the material of the body. This quality is called the specific heat of the material—typically denoted c . Thus we have $H = mc\Delta T$. The amount of heat required for an infinitesimal change in temperature dT is denoted dH . To summarize, heat is energy in transit, and dH does not represent the change in the amount of heat in the body inasmuch as “the amount of heat in a body” has no meaning. When a quantity of heat dH is transferred in time dt , then the rate of energy transfer is $\frac{dH}{dt}$.

We now derive the heat equation in one dimension. Suppose that we have a rod of length L . While the derivation will be for the case that the rod is one-dimensional, it

is advantageous to visualize the rod as having a cross-sectional area of one square unit. Let

- $u(x,t)$ = the temperature of the rod at the point x ($0 \leq x \leq L$) at time t ($t \geq 0$).
- $\hat{q}(x,t)$ = the heat flow at point x at time t (a vector quantity)
- ρ = the density of the material (assumed to be constant)
- c = the specific heat of the material
- ΔQ = change in internal energy
- Δu = change in temperature.

For \hat{n} , a unit vector, $\hat{q} \cdot \hat{n}$, is the heat flux in the direction of \hat{n} . The two laws that we use in our derivation of the heat equation are conservation of energy and Fourier's law. Fourier's law is

$$\hat{q}(x,t) = -k\nabla u(x,t)$$

which, in one dimension, is

$$\hat{q}(x,t) = -k \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \hat{i}. \tag{1}$$

The number k is a constant of the material called the thermal conductivity. The reason for the negative sign is that heat flows from higher to lower temperatures and $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ is positive if $u(x,t)$ is increasing as x increases.

Consider the small segment $[x, x + \Delta x]$. (See Fig. 5.2.1.) The amount of heat energy passing through the segment at point x in time Δt is approximately $\hat{q}(x,t) \cdot \hat{i}(\Delta t)$, and the amount of heat energy passing through the segment at point $x + \Delta x$ in time Δt is approximately $\hat{q}(x + \Delta x, t) \cdot \hat{i}(\Delta t)$. Depending on the direction of heat flow and the absence of a heat source or a heat sink, one of these quantities will represent an addition to the internal energy of the segment, and the other will represent a removal of internal energy from the segment. For definiteness, suppose energy is being added at x and removed at $x + \Delta x$. Then change in internal energy is

$$\Delta Q = [\hat{q}(x,t) \cdot \hat{i} - \hat{q}(x + \Delta x, t) \cdot \hat{i}] \Delta t. \tag{2}$$

When the amount of energy ΔQ is added to a body of mass m and specific heat c , the temperature of the body rises according to

$$\Delta Q = mc\Delta u. \tag{3}$$

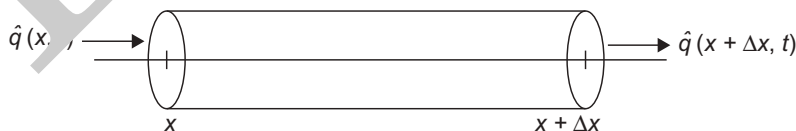


FIGURE 5.2.1

Thus from Eqs. (2) and (3) we get

$$\left[\hat{q}(x, t) \cdot \hat{i} - \hat{q}(x + \Delta x, t) \cdot \hat{i} \right] \Delta t = mc \Delta u$$

or

$$\hat{q}(x, t) \cdot \hat{i} - \hat{q}(x + \Delta x, t) \cdot \hat{i} = mc \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

Taking the limit as $\Delta t \rightarrow 0$ gives

$$\hat{q}(x, t) \cdot \hat{i} - \hat{q}(x + \Delta x, t) \cdot \hat{i} = mc \frac{\partial u}{\partial t}.$$

So, from Eqs. (1) and (2) we get

$$\hat{q}(x, t) \cdot \hat{i} - \hat{q}(x + \Delta x, t) \cdot \hat{i} = -k \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} \right] = mc \frac{\partial u}{\partial t} = \rho(\Delta x)c \frac{\partial u}{\partial t}$$

or

$$\frac{-k \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} \right]}{\Delta x} = \rho c \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Taking the limit as $\Delta x \rightarrow 0$ gives

$$k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial u}{\partial t}.$$

This is often written as

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t},$$

where $\alpha = \frac{k}{\rho c}$.

EXERCISE

1. Show that if there is a heat source $f(x)$, then the heat equation becomes

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f(x).$$

5.4 DERIVATION OF THE WAVE EQUATION IN ONE DIMENSION

Suppose we have a string stretched along the x -axis between $x = 0$ and $x = L$ with tension T . The string is fixed at the endpoints. We distort the string in the vertical direction by plucking it, which will cause the string to vibrate in the vertical direction. We assume there is no damping and no external forces, and we want to find the equation that governs the dynamics of motion.

Consider Fig. 5.3.1 below that depicts the forces on a small element of string in the interval $[x, x + \Delta x]$. We let

- $u(x,t)$ = the vertical displacement of the string from the x -axis at point x at time t
- $\theta(x,t)$ = the angle the string makes with a horizontal line at point x at time t
- $T(x,t)$ = the tension in the string at point x at time t
- $\rho(x)$ = the mass density of the string at point x .

We assume that the string is perfectly flexible, so that the forces that parts of the string exert on one another are tangential to the string. This means that $T(x,t)$ is tangent to the string at (x,t) so

$$\tan[\theta(x, t)] = \text{the slope of the tangent line} = \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$$

We assume that there is no net force in the horizontal direction so that the string vibrates vertically. This means

$$T(x, t) \cos [\theta(x, t)] = T(x + \Delta x, t) \cos [\theta(x + \Delta x, t)];$$

i.e., the horizontal force to the left is equal to the horizontal force to the right.

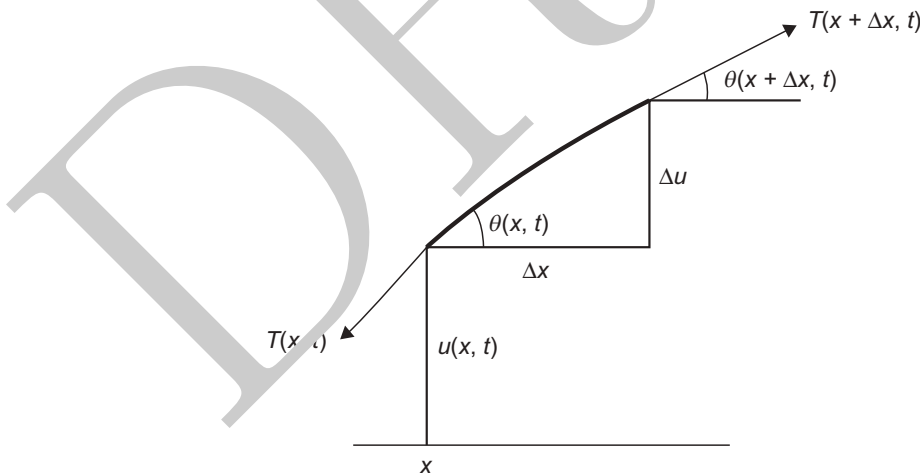


FIGURE 5.3.1

Analysis of forces in the u (vertical) direction:

The net force in the vertical direction is not zero, and we apply Newton's law, Force = mass \times acceleration. The mass of the string between x and $x + \Delta x$ is approximately

$$\rho(x)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta u)^2}.$$

The acceleration is the second derivative with respect to time, which is $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$ at the point (x, t) .

The force in the u -direction is the sum of $T(x, t) \sin [\theta(x, t)]$ and $T(x + \Delta x, t) \sin [\theta(x + \Delta x, t)]$, which, because of the direction of $T(x, t)$ and $T(x + \Delta x, t)$, is

$$T(x + \Delta x, t) \sin [\theta(x + \Delta x, t)] - T(x, t) \sin [\theta(x, t)].$$

Thus the governing equation in the u -direction is

$$\begin{aligned} \rho(x)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta u)^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \\ = T(x + \Delta x, t) \sin [\theta(x + \Delta x, t)] - T(x, t) \sin [\theta(x, t)]. \end{aligned} \tag{1}$$

This is the equation that connects the tension and the vertical displacement from equilibrium.

Divide Eq. (1) by Δx to get

$$\rho(x)\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{T(x + \Delta x, t) \sin [\theta(x + \Delta x, t)] - T(x, t) \sin [\theta(x, t)]}{\Delta x}. \tag{2}$$

We now work with the right-hand side of Eq. (2). Recall that

$$T(x, t) \cos [\theta(x, t)] = T(x + \Delta x, t) \cos [\theta(x + \Delta x, t)]$$

so the right-hand side of Eq. (1) is equal to

$$\begin{aligned} & \left(\frac{T(x + \Delta x, t) \sin [\theta(x + \Delta x, t)] - T(x, t) \sin [\theta(x, t)]}{T(x + \Delta x, t) \cos [\theta(x + \Delta x, t)] - T(x, t) \cos [\theta(x, t)]} \right) T(x, t) \cos [\theta(x, t)] \\ & = \frac{\tan [\theta(x + \Delta x, t)] - \tan [\theta(x, t)]}{\Delta x} T(x, t) \cos [\theta(x, t)]. \end{aligned} \tag{3}$$

Now

$$\tan [\theta(x, t)] = \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}$$

so the right-hand side of Eq. (3) can be written

$$\left(\frac{\frac{\partial T(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}}{\Delta x} \right) T(x, t) \cos [\theta(x, t)].$$

Thus Eq. (2) can be written

$$\begin{aligned} \rho(x) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \\ = \left(\frac{\frac{\partial T(x + \Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}}{\Delta x} \right) T(x, t) \cos [\theta(x, t)]. \end{aligned} \tag{4}$$

Taking the limit as $\Delta x \rightarrow 0$ in Eq. (4) gives

$$\rho(x) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} T(x, t) \cos [\theta(x, t)]. \tag{5}$$

We want to express the right-hand side of Eq. (5) in terms of $u(x, t)$. To do this, we refer back to Fig. 5.3.1 and note that

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} = \tan [\theta(x, t)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ and } \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

So we have

$$\rho(x) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} T(x, t) \cos [\theta(x, t)]. \tag{6}$$

Eq. (6) is not solvable, so the derivations of the equation known as the wave equation make simplifying assumptions. (Actually, we have ignored some factors already, including elasticity.) For a more complete derivation that includes these factors, see Weinberger, *A First Course in Partial Differential Equations*. We assume that the mass density of the string is constant and replace $\rho(x)$ by ρ and assume that θ is small so that

$$T(x, t) \cos [\theta(x, t)] \approx T(x, t) \text{ and } \tan [\theta(x, t)] \approx 0$$

and thus

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} \approx 1.$$

If we assume that $T(x,t)$ is constant, $T(x,t) = T$, with these assumptions and approximations, Eq. (6) becomes

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

or

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{7}$$

where $c^2 = \frac{T}{\rho}$.

Eq. (7) is the wave equation with no external forces. If there were external forces present whose sum was $F(x,t)$, then we would modify Eq. (7) to

$$\begin{aligned} \rho(x) \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta t)^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \\ = T(x + \Delta x, t) \sin [\theta(x + \Delta x, t)] - T(x, t) \sin [\theta(x, t)] + F(x, t) \end{aligned}$$

and continue the analysis as we did. The result would be the equation

$$\rho \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t).$$

EXERCISES

1. Complete the derivation of the wave equation in the case there is an external force $F(x,t)$.
2. Show that a solution to

$$\frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

is $u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$. (We use this in the next section.)

3. Show that a solution to

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

is $u(x,t) = f(x - vt) + g(x + vt)$ where f and g have continuous second derivatives with respect to x and t .

5.5 AN EXPLICIT SOLUTION OF THE WAVE EQUATION

The wave equation in one dimension

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

can be solved explicitly by making a change of variables that will convert the equation into the form

$$\frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

We demonstrate that the change of variables

$$\xi = x + ct$$

$$\eta = x - ct$$

accomplishes the desired transformation. To do this, we use the chain rule several times. We have

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot 1.$$

We also have

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

Now

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot 1 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot 1 = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$$

and

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

Thus

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

We also have

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \cdot c + \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot (-c) = c \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$$

and

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

Now

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot c + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot (-c)$$

and

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot c + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot (-c).$$

Thus

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \cdot c + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot (-c) - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot c + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \cdot (-c) \right] \\ &= c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned}$$

and we have

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &= c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right) \\ &= -4c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \end{aligned}$$

We now solve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Integrating $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}$ with respect to ξ gives

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \int \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} d\xi = \int 0 d\xi = \Psi(\eta)$$

because

$$\frac{d}{d\xi} (\Psi(\eta)) = 0.$$

Integrating $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ with respect to η gives

$$u(\xi, \eta) = \int \Psi(\eta) d\eta = p(\eta) + q(\xi)$$

where $p(\eta)$ is an antiderivative of $\Psi(\eta)$ that involves only η .

Thus

$$u(x, t) = p(x + ct) + q(x - ct)$$

for any twice differentiable functions p and q . This is d'Alembert's formula.

If we have appropriate initial conditions, then we can specify p and q as we now show.

Suppose that

$$u(x, 0) = f(x) \text{ and } u_t(x, 0) = g(x).$$

So

$$u(x, 0) = p(x + 0) + q(x - 0) = p(x) + q(x) = f(x) \tag{1}$$

and

$$u_t(x, t) = cp'(x + ct) - cq'(x - ct)$$

so

$$u_t(x, 0) = cp'(x + 0) - cq'(x - 0) = cp'(x) - cq'(x) = g(x). \tag{2}$$

If we differentiate Eq. (1) and multiply by c , we get

$$cp'(x) + cq'(x) = cf'(x). \tag{3}$$

Adding Eqs. (2) and (3) gives

$$2cp'(x) = g(x) + cf'(x)$$

so that

$$p'(x) = \frac{1}{2c}g(x) + \frac{1}{2}f'(x).$$

Integrating, we get

$$p(x) = \frac{1}{2c} \int_0^x g(\tau) d\tau + K + \frac{1}{2}f(x).$$

Then

$$q(x) = f(x) - p(x) = f(x) - \left[\frac{1}{2c} \int_0^x g(\tau) d\tau + K + \frac{1}{2}f(x) \right]$$

$$= \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(\tau) d\tau - K.$$

So

$$p(x + ct) = \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} g(\tau) d\tau + \frac{1}{2}f(x + ct) + K$$

and

$$\begin{aligned} q(x - ct) &= \frac{1}{2}f(x - ct) - \frac{1}{2c} \int_0^{x-ct} g(\tau) d\tau - K \\ &= \frac{1}{2}f(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^0 g(\tau) d\tau - K. \end{aligned}$$

Finally, we have

$$u(x, t) = p(x + ct) + q(x - ct) = \frac{1}{2} [f(x + ct) + f(x - ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\tau) d\tau. \tag{4}$$

Eq. (4) is also called d'Alembert's formula.

We shall give the solution for the heat equation later in the text, but we give a cartoon of graphs below showing how the solutions of the wave equation and the heat equation evolve in time for the same initial condition (a Gaussian distribution). In Fig. 5.4.1, we show the evolution of the wave equation, and in Fig. 5.4.2 we show the evolution of the heat equation. Notice that for the wave equation, the distribution splits into two equal parts, each of the same shape, but one half the size as the original distribution. The wave equation is the prototypical example of a hyperbolic PDE, and the solutions of such equations behave in this manner. For the heat equation, the distribution of the initial condition diffuses over time. (The heat equation is also called the diffusion equation.) The heat equation is the prototypical example of a parabolic PDE, and the solutions of such equations behave in this manner.

Graphs of the solution to the wave equation as it evolves from its initial condition through $t=1, 2$ and 3 .

The graphs of the solution to the heat equation for $t = 0, 0.5$ and 1 .

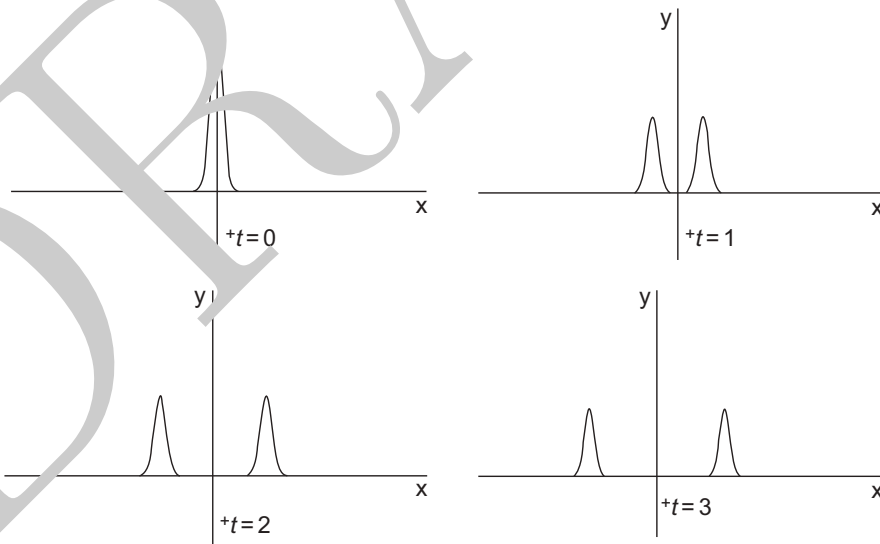


FIGURE 5.4.1

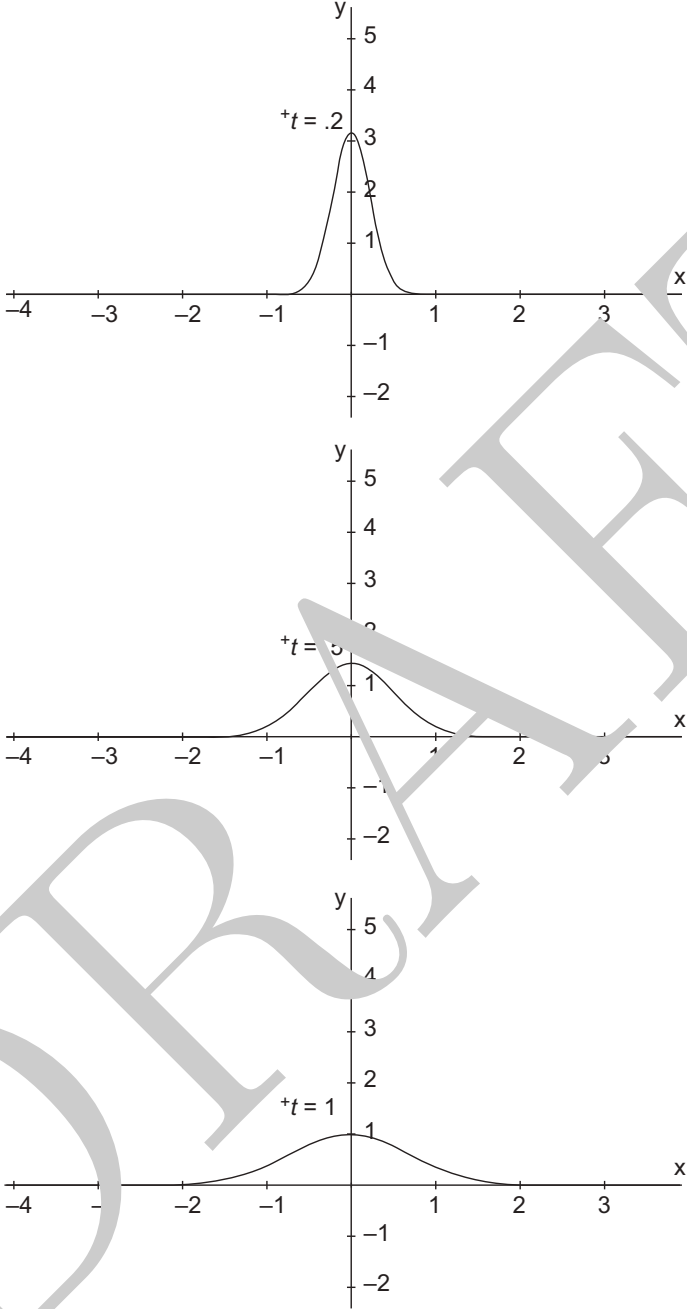


FIGURE 5.4.2

EXERCISES

1. Solve the wave equation on $[0, \pi]$ if $u(x, 0) = 0$ and $u_t(x, 0) = \sin x$.
2. Solve the wave equation on $[0, \pi]$ if $u(x, 0) = \sin x$ and $u_t(x, 0) = 0$.
3. Solve the wave equation on $[0, 1]$ if $u(x, 0) = 1 - x^2$ and $u_t(x, 0) = 0$.
4. Solve the wave equation on $[0, 1]$ if

$$u(x, 0) = \begin{cases} x, & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \frac{1}{2} \leq x < 1 \end{cases}, u_t(x, 0) = \sin \pi x.$$

5. Solve the wave equation on $[0, 1]$ if $u(x, 0) = 0$ and $u_t(x, 0) = 1$.
6. Consider the PDE

$$u_{tt}(x, t) + 2au_t(x, t) + a^2u(x, t) = a^2u_{xx}(x, t), \quad a > 0, \quad -\infty < x < \infty; \quad (5)$$

which models voltage in a power line.

- a. Show that if $y(x, t)$ satisfies $y_{tt}(x, t) = a^2y_{xx}(x, t)$, then $u(x, t) = e^{-at}y(x, t)$ satisfies Eq. (5).
- b. Find the solution for Eq. (5) with initial conditions $u(x, 0) = 0$ and $u_t(x, 0) = \sin x$.
- c. Find the solution for Eq. (5) with initial conditions $u(x, 0) = \sin x$ and $u_t(x, 0) = 0$.
7. Solve the wave equation on $-\infty < x < \infty$ if
 - a. $u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, \quad u_t(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$
 - b. $u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad u_t(x, 0) = xe^{-x^2}$

5.6 CONVERTING SECOND-ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS TO STANDARD FORM

Next we demonstrate how to convert a second-order PDE of the form

$$A \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

into one of the three equations we studied earlier by a linear change of variables. The process is computationally similar to rotating axes in the plane to convert an equation of the form

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

into a parabola, ellipse, or a hyperbola in standard form. We now review that process.

Start with a vector \hat{v} . We find the coordinates of \hat{v} with respect to two sets of axes. The first set of axes, (x, y) , is in standard position, and the second set of axes, (x', y') , is

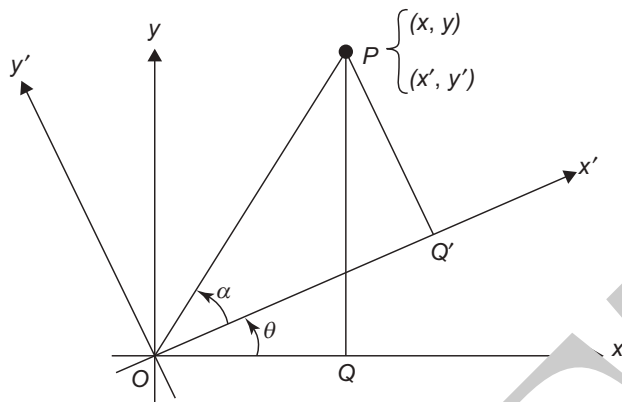


FIGURE 5.5.1

obtained by rotating the first set of axes counterclockwise through an angle θ . (See Fig. 5.5.1.)

Suppose in the (x', y') system, the vector \hat{v} makes an angle of α with the x' axis. Then in the (x, y) system, the vector \hat{v} makes an angle of $\alpha + \theta$ with the x axis. Then

$$\begin{aligned} x' &= |\hat{v}| \cos \alpha, & y' &= |\hat{v}| \sin \alpha \\ x &= |\hat{v}| \cos(\alpha + \theta), & y &= |\hat{v}| \sin(\alpha + \theta). \end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned} x &= |\hat{v}| \cos(\alpha + \theta) = |\hat{v}| [\cos \alpha \cos \theta - \sin \alpha \sin \theta] = x' \cos \theta - y' \sin \theta \\ y &= |\hat{v}| \sin(\alpha + \theta) = |\hat{v}| [\sin \alpha \cos \theta + \cos \alpha \sin \theta] = x' \sin \theta + y' \cos \theta. \end{aligned}$$

We want to find A', \dots, F' so that

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F'.$$

Now

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F &= A(x' \cos \theta - y' \sin \theta)^2 \\ &+ B(x' \cos \theta - y' \sin \theta)(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + \dots + F. \end{aligned} \tag{1}$$

If we expand the right-hand side of Eq. (1) and sets the result equal to

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F'$$

then one finds that

$$\begin{aligned} A' &= A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta \\ B' &= B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2(C - A) \sin \theta \cos \theta \\ C' &= A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta \\ D' &= D \cos \theta + E \sin \theta \\ E' &= -D \sin \theta + E \cos \theta \\ F' &= F. \end{aligned}$$

We want to choose θ so there is no $x'y'$ term, i.e., we want $B' = 0$. We use identities

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta) \text{ and } \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta)$$

to get

$$B' = B \cos(2\theta) + (C - A) \sin(2\theta)$$

so that $B' = 0$ if $B \cos(2\theta) = (A - C) \sin(2\theta)$ or

$$\frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \tan(2\theta) = \frac{B}{A - C}$$

so

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{B}{A - C} \right).$$

Example:

We convert the equation

$$x^2 + 3xy + y^2 = 7$$

to standard form.

We have $A = C = 1$ and $B = 3$. Thus $2\theta = 90^\circ$ so $\theta = 45^\circ$ and

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \quad y = x' \sin \theta + y' \cos \theta = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

so

$$\begin{aligned} x^2 + 3xy + y^2 &= \left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \right)^2 + 3 \left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}} \right)^2 \\ &= \frac{5x'^2 - y'^2}{2} = 7 \end{aligned}$$

which is the equation of a hyperbola.

Repeating what we said earlier, recall that if $B^2 - 4AC > 0$ the graph is a hyperbola, if $B^2 - 4AC = 0$ the graph is an ellipse, if $B^2 - 4AC < 0$ the graph is a parabola. We follow the same nomenclature with second-order PDEs, designating them as hyperbolic, elliptic, or parabolic according to the sign of $B^2 - 4AC$.

We now demonstrate by an example that the same change of variables used to rotate the axes to convert a second-degree equation to standard form works to convert a second-order PDE to standard form.

Example:

We convert the equation

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 7$$

to

$$A \frac{\partial^2 u(x', y')}{\partial x'^2} + B \frac{\partial^2 u(x', y')}{\partial y'^2} = C$$

using the change of variables

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}.$$

Recall the chain rule for partial derivatives: If u is a function of x and y and x and y are each functions of x' and y' , then

$$\frac{\partial u}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x'} \quad \text{and} \quad \frac{\partial u}{\partial y'} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'}.$$

We have

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\partial x}{\partial y'} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial x'} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial y'} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

so

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (u_x + u_y) \quad \text{and}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x'} \frac{(-1)}{\sqrt{2}} + \frac{\partial u}{\partial y'} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (u_y - u_x).$$

Then

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} &= \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial u}{\partial x'} \right) = \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (u_x + u_y) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x} (u_x + u_y) \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial y} (u_x + u_y) \frac{\partial y}{\partial x'} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u_{xx} + u_{xy}) \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} (u_{yx} + u_{yy}) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} u_{xx} + u_{xy} + \frac{1}{2} u_{yy}. \end{aligned}$$

Likewise,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} &= \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial u}{\partial y'} \right) = \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (u_y - u_x) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\partial}{\partial x} (u_y - u_x) \frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial y} (u_y - u_x) \frac{\partial y}{\partial y'} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ [u_{xy} - u_{xx}] \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \right) + [u_{yy} - u_{yx}] \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} u_{xx} - u_{xy} + \frac{1}{2} u_{yy}. \end{aligned}$$

We now show

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{5}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}.$$

We have

$$\begin{aligned} \frac{5 \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2}}{2} &= \frac{5}{2} \left(\frac{1}{2} u_{xx} + u_{xy} + \frac{1}{2} u_{yy} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} u_{xx} - u_{xy} + \frac{1}{2} u_{yy} \right) \\ &= \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4} \right) u_{xx} + u_{xy} \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{4} \right) + u_{yy} \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4} \right) = u_{xx} + 3u_{xy} + u_{yy}. \end{aligned}$$

EXERCISES

1. Classify the PDEs below as parabolic, hyperbolic, or elliptic and convert them to standard form.

- a. $u_{xx} - 2u_{xy} + 9u_{yy} - u_x + 5u_y = 0.$
- b. $u_{xx} - 4u_{xy} - 9u_{yy} - 3u_y = 0.$
- c. $u_{xx} - u_{xy} = 0.$
- d. $u_{xx} - 5u_{xy} + 4u_{yy} + u_x = 0.$

25 Les systèmes d'équations en général, problème des 3 corps

Montrer que ce genre de problème possède bien des solutions mais qu'il est impossible de les écrire sous une forme analytique finie (problème des 3 corps, N-corps, grand nombre de particules, chaos etc.) Il y a 6 équations par corps. (x, Vx) et les lois d'attractions (Newton, gravitation, force etc.)

Voir si c'est bien le bon endroit pour en parler

25.1 Etude Ediff Schaum

DRAPAFET

26 Liens vers sites maths utiles online

26.1 Calculer en ligne avec petites calculatrices

26.1.1 Calculatrice Google : calcul itératif

On peut aisément faire des petits calculs de convergences du genre

$$X_{k+1} = f(X_k)$$

en utilisant la fonction "Ans" de la calculatrice de Google. Ci-dessous exemple de la fonction (suite) logistique :

$$X_{k+1} = rX_k(1 - X_k)$$

(Note de wiki pour la relation précédente : En mathématiques, une suite logistique est une suite réelle simple, mais dont la récurrence n'est pas linéaire)

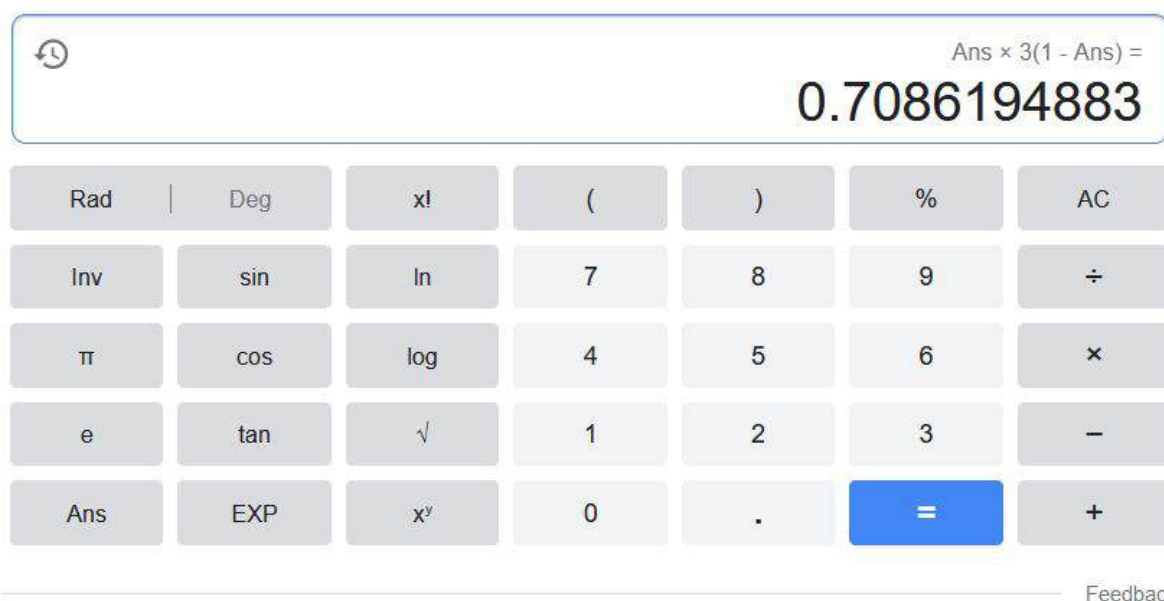


Figure 52: itérations

Il faut valider un résultat une première fois avec la touche "=" puis le stoker dans la mémoire avec la touche "Ans", par exemple taper "0.5" "=" "Ans". Ensuite taper une expression du genre $3 * \text{Ans} * (1 - \text{Ans})$ "=" puis répéter "=", "=", "=" etc.

[https://www.google.com/search?q=3+*+cos\(0.5\)](https://www.google.com/search?q=3+*+cos(0.5))

26.1.2 Calculatrice scientifique

<https://www.online-calculator.com/scientific-calculator/>

26.1.3 Calculatrice Hewlett Packard HP48 RPN (à installer)

<https://www.onworks.net/software/app-x48-hp48-calculator-emulator> (Pas online)
<http://www.alcula.com/calculators/rpn/> (Ce n'est pas une HP mais elle est RPN)

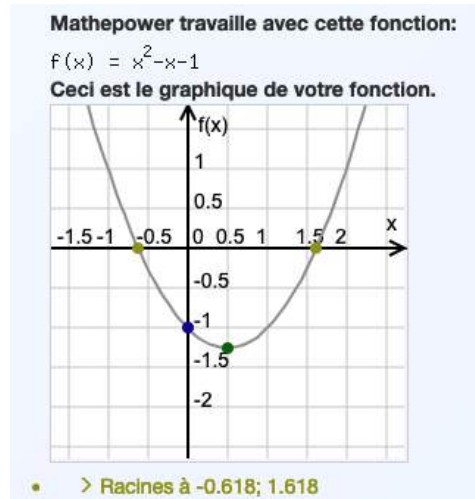
26.1.4 Calculatrice haute précision (Ex: 100 chiffres après la virgule)

<https://www.mathsisfun.com/calculator-precision.html>
<https://keisan.casio.com/calculator> (Plus disponible)

26.2 Traçage de courbes

26.2.1 Racines d'une équation (Ex: nombre d'or $x^2 - x - 1$)

Ne pas oublier que l'on peut approximer le nombre d'or (la divine proportion) à partir de la suite de Fibonacci : 1, 2, 3, 5, 8, 13 etc. où chaque nombre est la somme des deux entiers précédents. Ainsi $8/5$ ou $13/8$ donnent chacune une approximation du nombre d'or. Plus la suite est longue plus le quotient des deux derniers entiers donne un résultat est précis.

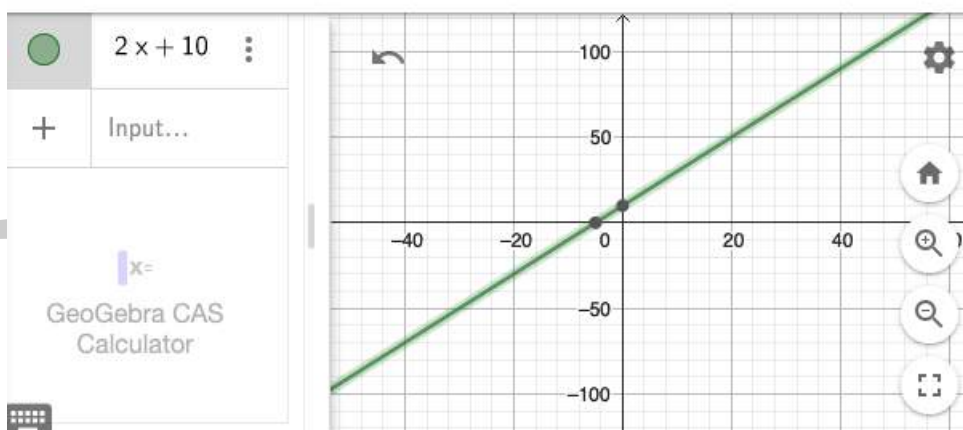


<https://www.mathepower.com/fr/lesracines.php>

26.2.2 Tracer une courbe avec Geogebra ou Desmos 2D (Ex: $2X + 10$)

Geogebra En 2D : <https://www.geogebra.org/cas>

GeoGebra



Desmos 2D (Limit : No pict, no sound) : <https://www.desmos.com/calculator?lang=fr>

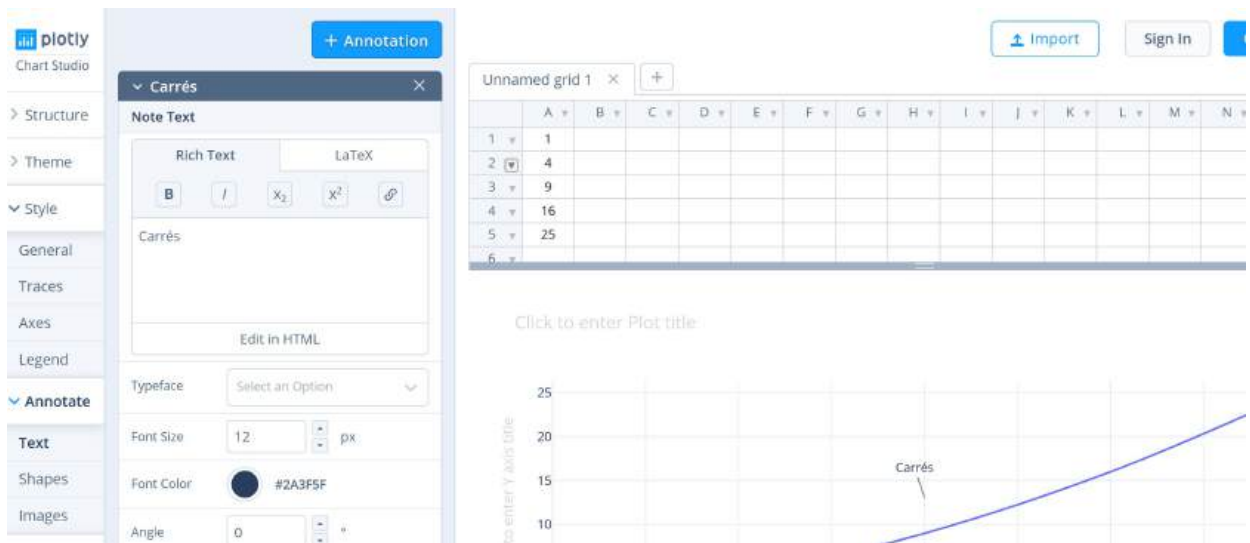
GraphSketch : Easy plotter <https://graphsketch.com/>

Desmos Tuto : <https://www.youtube.com/watch?v=-pGNBb8M3LQ>
 (The only SAT Math DESMOS Guide you'll ever need)³²

³²Try : $f(x)=...$ and next $f(x+5)$, table, mean and median, search curves intersect. only for straight line

26.2.3 Plotly : Tracer une courbe à partir d'un tableau Excel, liens avec Python, R, Jupyter

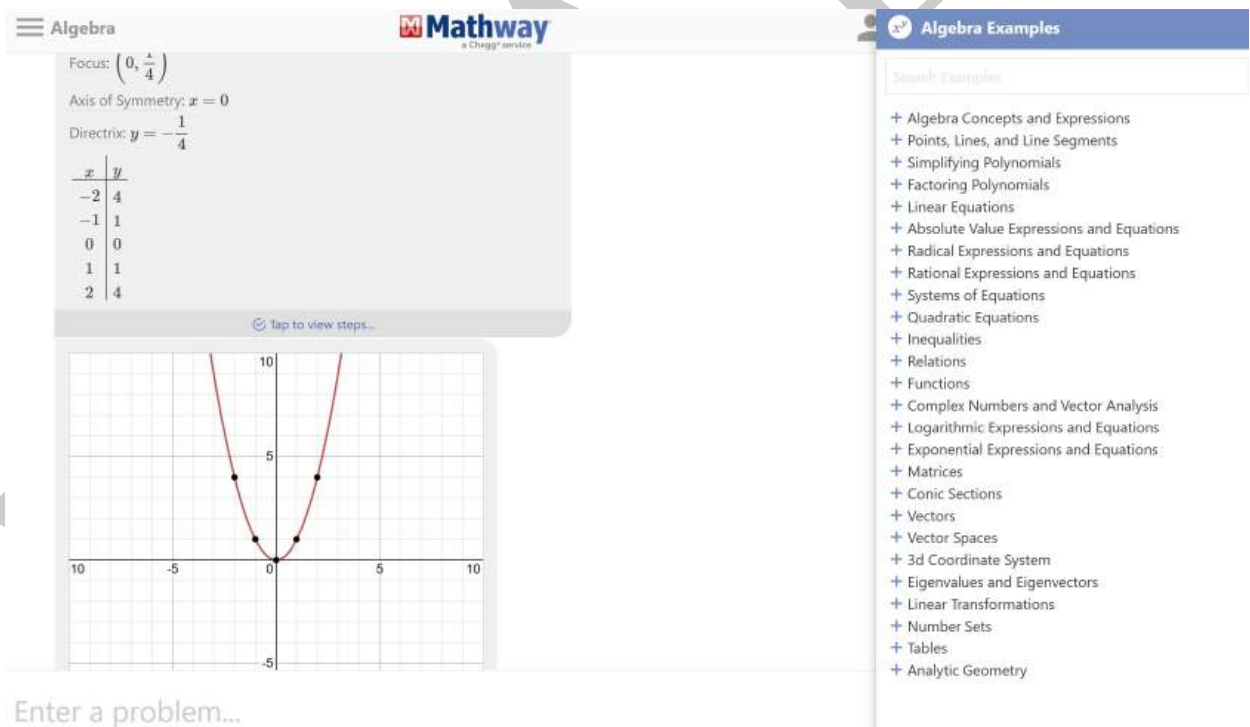
<https://chart-studio.plotly.com/create/#/>



<https://plotly.com/python/>

26.2.4 Mathway : Calcul et plot

<https://www.mathway.com/Algebra>



26.2.5 Graphs et calculs sur fonctions 3D ou complexes

Geogebra En 3D : <https://www.geogebra.org/3d?lang=fr>

26.2.6 Tracer une fonction de la variable complexe Z dans le plan complexe

Ce site permet de tracer le module d'une fonction complexe dans le plan complexe. On peut voir sur cette courbe les 3 zéros de la fonction

$$y = F(z) = 1 - (z - 1)^3$$

qui n'a qu'un zéro dans le domaine des Réels, pour $Z=2$. En effet :

$$1 - (2 - 1)^3 =$$

$$1 - (1)^3 = 1 - 1 = 0$$

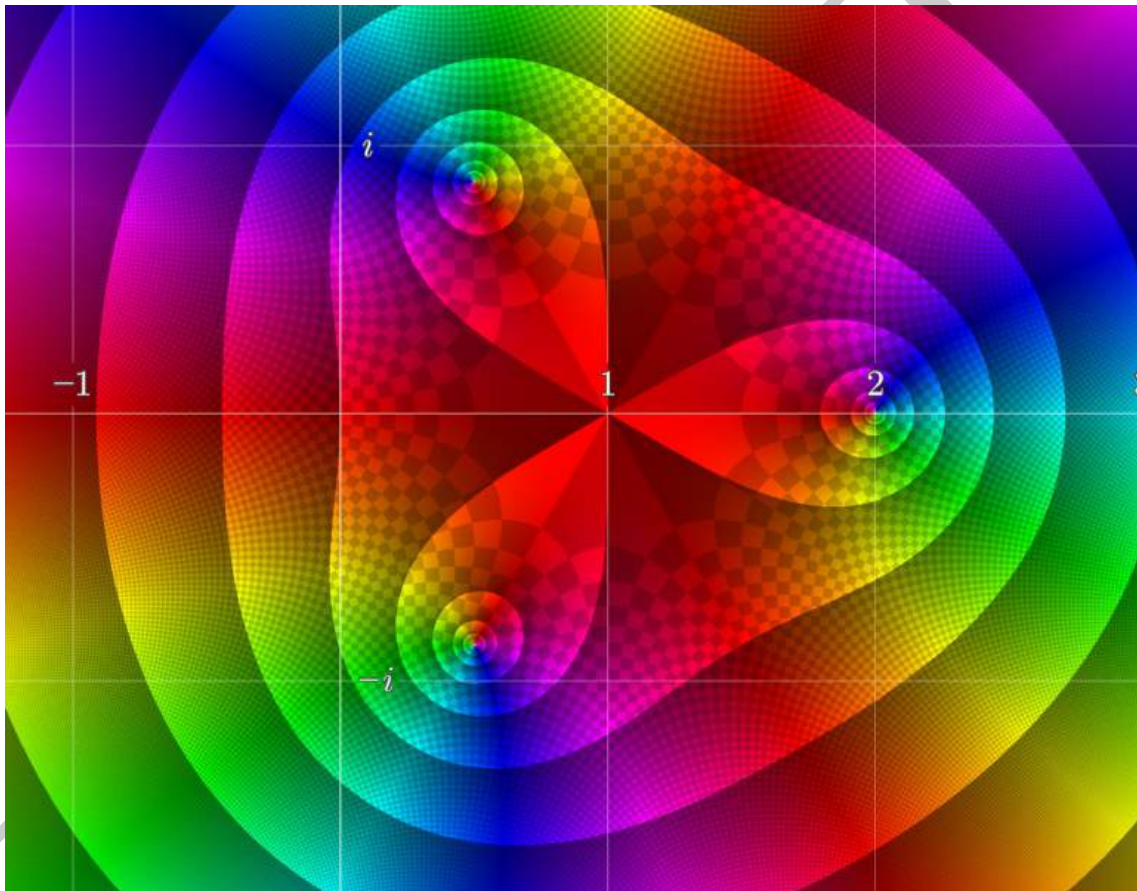


Figure 53: Courbes

les deux autres racines se situent dans le domaine des nombres complexe.

Voici le module de $F(z)$ dans le plan complexe. Les couleurs sont liées à l'amplitude du module de $F(z)$. [https://samuelj.li/complex-function-plotter/#1-\(z-1\)%5E3](https://samuelj.li/complex-function-plotter/#1-(z-1)%5E3). Il faudrait un deuxième graphique pour afficher la phase de $F(z)$.

26.3 Outils de conversion, real to float etc.

<https://www.h-schmidt.net/FloatConverter/IEEE754.html>

<https://codebeautify.org/>

26.3.1 Conversion d'unités (Ex : 1cm^3 en 1m^3)

<https://www.unitjuggler.com/convertir-volume-de-l-en-mm3.html>

26.3.2 Matrices et Plot, Calculatrices spécialisées (Déterminants, inversions etc.)

Demande de désactiver le AddBlock

<https://matrix.reshish.com/>

Complex Number Format : $2+3i$ etc.

<https://matrixcalc.org/>

26.3.3 Finance, Calculatrices spécialisées (intérêts composés etc.)

<https://codebeautify.org/calculators/>

26.3.4 Mise sous forme de fraction (Ex: $0.123\dots = \text{Num}/\text{Dénom}$)

The screenshot shows a web interface for converting repeating decimals to fractions. On the left, it displays the conversion of $0.\overline{123}$ to the fraction $\frac{41}{333}$. Below this, it identifies the fraction as 'Fraction Périodique - dCode' and lists the category as 'Arithmétique'. There are social media sharing icons for Plus, Facebook, Twitter, YouTube, and Email. On the right, there are two main sections: 'DETECTION DE DECIMALES FINIES' which includes a section for 'FRACTION À DÉVELOPPER A/B' with input fields for A and B, and a 'CALCULER' button; and 'TROUVER LA FRACTION' which includes input fields for 'DÉBUT DU NOMBRE (PARTIE NON PÉRIODIQUE)' (set to 0.) and 'DÉCIMALES RÉPÉTÉES (PÉRIODE)' (set to 123), with a 'CALCULER' button.

<https://www.dcode.fr/developpement-decimal-periodique#q5>

26.3.5 Calculator and Had to know

A lot of calculators ! <https://www.had2know.org/calculators.html>

26.3.6 Lambert W Function Calculator

$$W(x) = f^{-1} \text{ où } f(x) = xe^x$$

$$x = W(u)e^{W(u)}$$

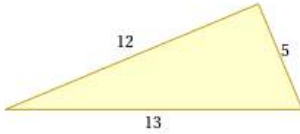
<https://www.had2know.org/academics/lambert-w-function-calculator.html>

Et y-a-t-il un lien avec $x^x = e^{x \ln(x)}$?

$$\left(\frac{1}{256}\right)^x = x$$

26.4 Calcul symbolique : Mathematica Wolfram (Version limitée)

Visual representation



Triangle shape

right triangle

Properties [More](#) [Step-by-step solution](#)

area	30
perimeter	30
interior angles	$\left(\cos^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) \text{ rad} \mid \cos^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) \text{ rad} \mid \frac{\pi}{2} \text{ rad} \right) \approx$ $(0.394791 \text{ rad} \mid 1.17601 \text{ rad} \mid 1.5708 \text{ rad})$
interior angle sum	$180^\circ = \pi \text{ rad} \approx 3.142 \text{ rad}$

Figure 54: Triangles

Input

$$y'(x) + 2y(x) = 3 \cos(x)$$

ODE classification

first-order linear ordinary differential equation

Alternate forms

$$y'(x) = 3 \cos(x) - 2y(x)$$

$$y'(x) + 2y(x) = \frac{3e^{-ix}}{2} + \frac{3e^{ix}}{2}$$

Differential equation solution [Approximate form](#) [Step-by-step solution](#)

$$y(x) = c_1 e^{-2x} + \frac{3 \sin(x)}{5} + \frac{6 \cos(x)}{5}$$

Figure 55: Equations Différentielles

<https://www.wolframalpha.com/>

26.5 Brilliant : programme éducation scientifique payant

<https://brilliant.org/daily-problems/>

26.6 Calcul symbolique : Mathematica

26.7 Symbolic and Numeric Maths Toolbox Online (Matlab/Simulink, Matrix Laboratory)

Uses Mupad for symbolic engine and computation !

Symbolab : simpler tool online : <https://fr.symbolab.com/solver>

Solutions > intégrale de arcsin(x)

$\int \arcsin(x)$

Etapes Graphe Rattaché Exemples

$\int \arcsin(x) dx$

Solution

$x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$

26.7.1 Octave (Matlab for Ubuntu)

sudo apt-get install octave

<https://octave.org/>

<https://gnu-octave.github.io/packages/>

```
x = -10:0.1:10; # Create an evenly-spaced vector from -10..10
y = sin (x);   # y is also a vector
plot (x, y);
title ("Simple 2-D Plot");
xlabel ("x");
ylabel ("sin (x)");
```

Principe des tableaux comme avec Numpy (Python). On peut lancer Octave en ligne de commande au moyen de : **octave-cli** (Ubuntu sur linuMU?, ou dans Kali sur asuMu via WSL), les graphiques s'affichent dans une nouvelle fenêtre.

26.8 Mathcad, calcul numérique (free login)

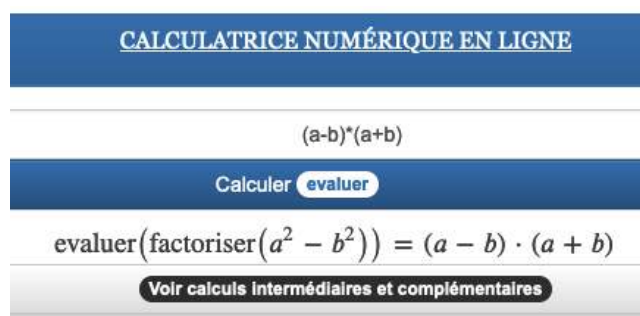
<https://fr.planetcalc.com/5494/#calculator6472>

26.9 Sage : Progs et Libs Python EDO, 2D, 3D, calcul différentiel etc.

Ressemble à Mathematica et notebook Jupiter avec Numpy et matplotlibLib intégré. Installation nécessaire, **A tester absolument !**

<https://doc.sagemath.org/html/en/constructions/search.html>

26.10 Calculatrice symbolique (Ex: factoriser $a^2 - b^2$) (Connexion obligatoire ?)



[https://www.solumaths.com/fr/calculatrice-en-ligne/calculer/evaluer/factoriser\(a%5E2-b%5E2\)](https://www.solumaths.com/fr/calculatrice-en-ligne/calculer/evaluer/factoriser(a%5E2-b%5E2))

26.11 Integral calculator online

<https://www.integral-calculator.com/>

26.11.1 Algorithms and Semi-algorithms

In computability theory and computational complexity theory, RE (recursively enumerable) is the class of decision problems for which a 'yes' answer can be verified by a Turing machine in a finite amount of time.[1] Informally, it means that if the answer to a problem instance is 'yes', then there is some procedure that takes finite time to determine this, and this procedure never falsely reports 'yes' when the true answer is 'no'. However, when the true answer is 'no', the procedure is not required to halt; it may go into an "infinite loop" for some 'no' cases. Such a procedure is sometimes called a semi-algorithm, to distinguish it from an algorithm, defined as a complete solution to a decision problem.[2]

26.11.2 Risch algorithm

The complete description of the Risch algorithm takes over 100 pages. The Risch–Norman algorithm is a simpler, faster, but less powerful variant that was developed in 1976 by Arthur Norman. The Risch algorithm applied to general elementary functions is not an algorithm but a semi-algorithm because it needs to check, as a part of its operation, if certain expressions are equivalent to zero (constant problem), in particular in the constant field. For expressions that involve only functions commonly taken to be elementary it is not known whether an algorithm performing such a check exists or not (current computer algebra systems use heuristics); moreover, if one adds the absolute value function to the list of elementary functions, it is known that no such algorithm exists; see Richardson's theorem. Note that this issue also arises in the polynomial division algorithm; this algorithm will fail if it cannot correctly determine whether coefficients vanish identically.[15] Virtually every non-trivial algorithm relating to polynomials uses the polynomial division algorithm, the Risch algorithm included. If the constant field is computable, i.e., for elements not dependent on x , the problem of zero-equivalence is decidable, then the Risch algorithm is a complete algorithm. Examples of computable constant fields are \mathbb{Q} and $\mathbb{Q}(y)$, i.e., rational numbers and rational functions in y with rational number coefficients, respectively, where y is an indeterminate that does not depend on x . This is also an issue in the Gaussian elimination matrix algorithm (or any algorithm that can compute the nullspace of a matrix), which is also necessary for many parts of the Risch algorithm. Gaussian elimination will produce incorrect results if it cannot correctly determine if a pivot is identically zero[citation needed].

26.12 Programmation online avec Python

Essayer le shell de Python "online" via ce site WEB.

<https://www.programiz.com/python-programming/online-compiler/>

Python n'impose pas de limite concernant la taille des nombres entiers, essayez de multiplier deux grands nombres comme :

$$13249816349128734619238476 \times 123041230498123487012938470129384701293487$$

```
from decimal import Decimal, getcontext
getcontext().prec = 550, x=Decimal(4)
Le site suivant nécessite une inscription (gratuite) :
https://replit.com/languages/python3 (Python)
```

26.13 Calcul numérique avec Numpy et matplotlib de Python

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

x_abs = 8
y_abs = 8
n_div = 300      # number of x and y interval division

x_min, x_max = -x_abs, x_abs
y_min, y_max = -y_abs, y_abs

x = np.linspace(x_min, x_max, n_div)
y = np.linspace(y_min, y_max, n_div)
xx = x - 1j * x[:, np.newaxis] # a + ib over complex plane

#out = (xx ** 3)**(1.0/2) - 1
#out = np.exp(xx) - (2)
out = (xx-1)*(xx-1-1j)*(xx-2-1j)*(xx+2+1j)

#X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = np.abs(out)
Zs = Z.clip(0,8)

#fig, ax = plt.subplots(figsize=(6,6))
#ax.imshow(Zs, cmap=plt.cm.Reds, interpolation='bilinear', extent=[x_min, x_max, y_min, y_max])
#ax.set_aspect(1)
#im = plt.imshow(Zs, interpolation='bilinear', cmap=plt.cm.Spectral, extent=[x_min, x_max, y_min, y_max])
im = plt.imshow(Zs, interpolation='bilinear', cmap=plt.cm.PuOr, extent=[x_min, x_max, y_min, y_max])
#cset = plt.contour(Zs, np.arange(0,8,0.1), linewidths=2, cmap=plt.cm.hot, extent=[x_min, x_max, y_min, y_max])
plt.xlabel('Re')
plt.ylabel('Im')
plt.colorbar(im)
plt.show()
```

Copier ce code python dans une fichier texte "example.py". Lancer Python3 avec les bonnes librairies (utiliser par exemple anaconda PS terminal) puis taper "python example.py" et les positions des racines de l'équation devraient s'afficher dans le plan complexe. La même opération dans un interpréteur online risque d'échouer pour des problèmes de librairies.

26.13.1 Shortest way to plot a sinus

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
x = np.linspace(0, 2 * np.pi, 100)
y = np.sin(x)
plt.plot(x, y)
plt.show()
```

26.14 Scratch Online

Le site suivant nécessite une inscription (gratuite).

<https://scratch.mit.edu/> (Scratch)

26.15 R Online

<https://docs.r-wasm.org/webr/latest/#try-it-out>

26.16 Programmation no-code ou soft-code

Nouvelle tendance etc. <https://bubble.io/>

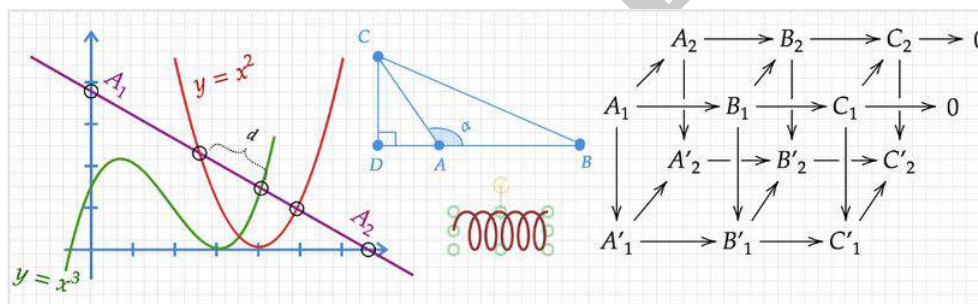
26.17 Editeur équations Latex

<https://editor.codecogs.com/>

$$\int \sin(s) ds + \frac{ds}{dt} \arctan(s)$$

$$\frac{1+x}{1-x} \left(x^{\frac{1}{2}}\right) \mapsto \Gamma(3) + N \leq 3$$

26.18 Matcha : Online Math Editor (login with google)



<https://www.mathcha.io/>

26.19 Julia Online

https://www.tutorialspoint.com/execute_julia_online.php

<https://docs.julialang.org/en/v1/stdlib/REPL/#The-Julia-REPL>

26.20 Clojure for maths (for Ubuntu)

Clojure Online

<https://tryclojure.org/>

lein repl (install OSX, Linux etc.)

<https://scicloj.github.io/docs/resources/libs/>

Bibliothèque énorme pour Clojure avec possibilité de faire des graphiques et de la visualisation de données très complexe. Il faut analyser la complexité de la mise en place de l'env.

26.21 Chlorine, Atom environment for Clojure

```

1 // Run this file: test run
2 // Note: script.clj must contain: "main myover.core/foo"
3 (ns myover.core (:require [quil.core :as q]))
4 // Start of code
5 //
6
7 // Functions
8 (defn Sv [v] (reduce + v))
9 (defn Pvw [v w] (reduce + (mapv * v w)))
10 (defn Nv [v] (count v))
11
12 // Main Function
13 // Linear regression: return alpha and beta (yvar+6) according to the points
14 // (measures) vectors x and y
15 (defn regLin [x y] (def N (Nv x))
16   (def Sx (Sv x))
17   (def Sy (Sv y))
18   (def Sxx (Pvw x x))
19   (def Sxy (Pvw x y))
20   (def alpha (/ (- (+ N Sxy) (+ Sx Sy)) (- (+ N Sxx) (+ Sx Sx))))
21   (def beta (/ (- (+ Sy) (+ alpha Sx)) (+ N)))
22   [alpha beta])
23
24 //
25 // Tests
26 (println (Sv [1 2 3 4]) " Should be 10")
27 (println (Pvw [1 2 3 4] [4 3 2 1]) " Should be 20")
28 (println (Nv [1 2 3 4]) " Should be 4")
29 (println (regLin [1 2 3 4] [1 2 3 4]) " Should be [1 0]")
30 (println (regLin [1 2 3 4] [1 1 1 1]) " Should be [0 1]")
31 (println (regLin [1 2 3 4] [3 5 7 9]) " Should be [2 1]")
32 (println (regLin [1 2 3 4] [2.3 5.1 6.0 9.3]) " Should be [2.19 0.19]")
33
34
35 (defn foo [] (println "Test a function near regression!"))

```

```

Chlorine REPL
" 10 Should be 10
 20 Should be 20
nil
" 4 Should be 4
[1 0] Should be [1 0]
[0 1] Should be [0 1]
[2 1] Should be [2 1]
[2.1900000000000004 0.19999999999999984] Should be [2.19 0.19]

```

Figure 56: RegLin in Clojure

26.22 Compare Clojure, R and Python coding styles (full implementation)

26.23 Problem used for languages comparisons : linear regression

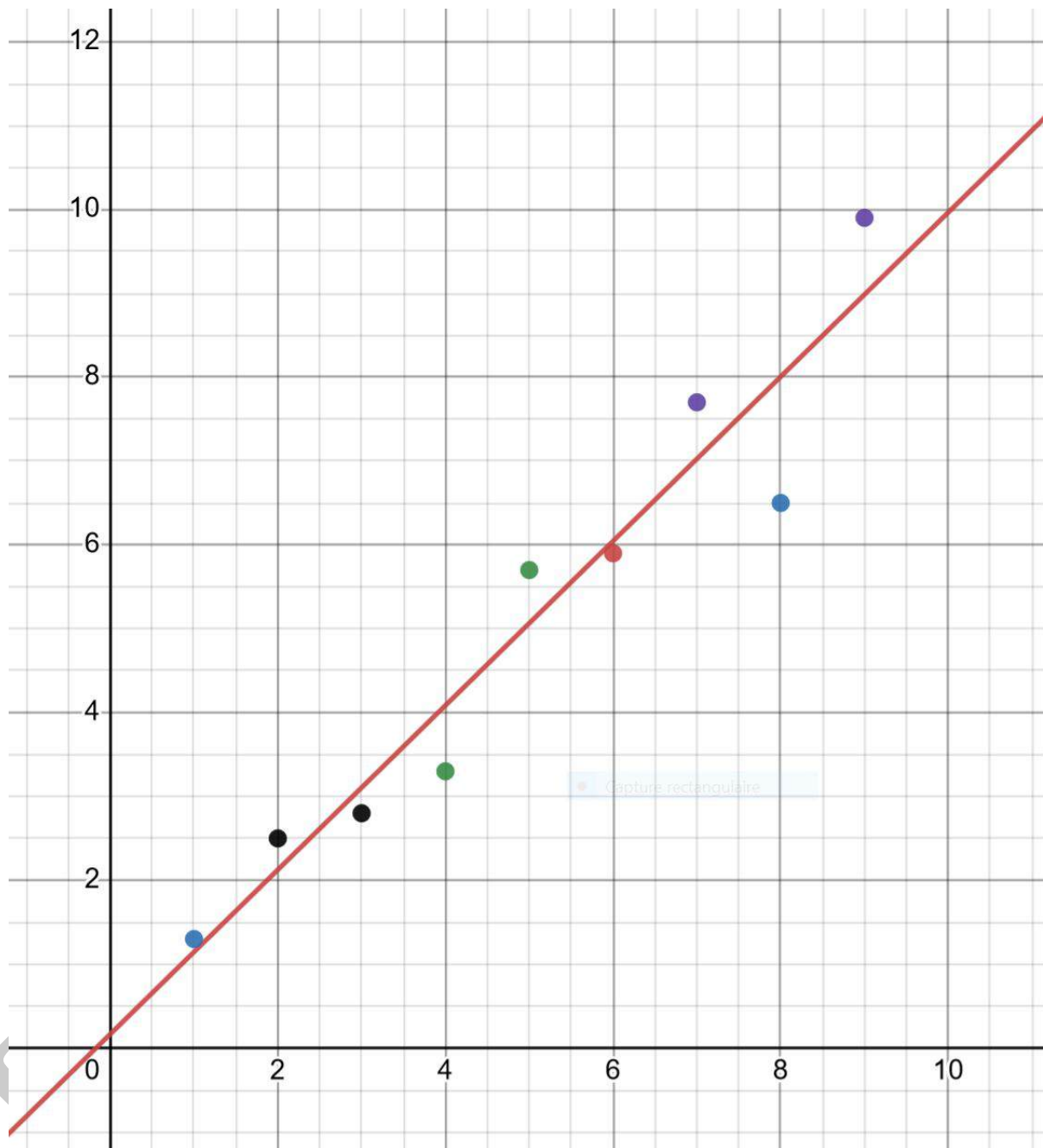


Figure 57: Linear Regression

26.24 Algorithm used for comparisons

- La prescription des moindres carrés s'écrit pour ce type de modèle:

$$S = \sum_{i=1}^N (y_i - f(x_i; \theta))^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - \alpha x_i - \beta)^2$$

- Le minimum de cette expression est trouvé quand les deux dérivées partielles $\partial S / \partial \alpha$ et $\partial S / \partial \beta$ sont égales à zéro:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^N 2(y_i - \alpha x_i - \beta)(-x_i) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^N 2(y_i - \alpha x_i - \beta)(-1) = 0$$

Figure 58: RegLin in Clojure

- peut être écrit en forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N x_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N x_i y_i \\ \sum_{i=1}^N y_i \end{bmatrix}$$

- ce qui donne la solution:

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N x_i^2 & \sum_{i=1}^N x_i \\ \sum_{i=1}^N x_i & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N x_i y_i \\ \sum_{i=1}^N y_i \end{bmatrix}$$

Figure 59: RegLin in Clojure

- Si on définit les sommes suivantes:

$$S_X = x_1 + x_2 + \dots + x_N$$

$$S_Y = y_1 + y_2 + \dots + y_N$$

$$S_{XX} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2$$

$$S_{XY} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_N y_N$$

- les coefficients α et β sont ensuite calculés par:

$$\alpha = \frac{N S_{XY} - S_X S_Y}{N S_{XX} - S_X^2}$$

$$\beta = \frac{S_Y - \alpha S_X}{N}$$

Figure 60: RegLin in Clojure

26.25 Clojure full implementation example

```

core.clj — ~/work/myover/src/myover
Welcome Guide | core.clj
1 ;; Run this file : lein run
2 ;; Note : script.clj must contain : ":main myover.core/foo"
3 (ns myover.core (:require [quil.core :as q]))
4 ;; Start of code
5 ;;
6
7 ;; Functions
8 (defn Sv [v] (reduce + v))
9 (defn Pvw [v w] (reduce + (mapv * v w)))
10 (defn Nv [v] (count v))
11
12 ;; Main Function
13 ;; Linear regression : return alpha and beta (y=ax+b) according to the points
14 ;; (measures) vectors x and y
15 (defn regLin [x y] (def N (Nv x))
16   (def Sx (Sv x))
17   (def Sy (Sv y))
18   (def Sxx (Pvw x x))
19   (def Sxy (Pvw x y))
20   (def alpha (/ (- (* N Sxy) (* Sx Sy)) (- (* N Sxx) (* Sx Sx))))
21   (def beta (/ (- (+ Sy) (* alpha Sx)) (+ N)))
22   [alpha beta])
23
24 ;;
25 ;; Tests
26 (println (Sv [1 2 3 4]) " Should be 10")
27 (println (Pvw [1 2 3 4] [4 3 2 1]) " Should be 20")
28 (println (Nv [1 2 3 4]) " Should be 4")
29 (println (regLin [1 2 3 4] [1 2 3 4]) " Should be [1 0]")
30 (println (regLin [1 2 3 4] [1 1 1 1]) " Should be [0 1]")
31 (println (regLin [1 2 3 4] [3 5 7 9]) " Should be [2 1]")
32 (println (regLin [1 2 3 4] [2.3 5.1 6.0 9.3]) " Should be [2.19 0.19]")
33
34
35 (defn foo [] (println "Test a function for linear regression!"))

```

Figure 61: RegLin in Clojure

26.26 Compare Clojure and Python coding styles (full implementation)

```

;; Functions
(defn Sv [v] (reduce + v))
(defn Pvw [v w] (reduce + (mapv * v w)))
(defn Nv [v] (count v))

;; Main Function
;; Linear regression : return alpha and beta (y=ax+b) according to the points
;; (measures) vectors x and y
(defn regLin [x y] (def N (Nv x))
  (def Sx (Sv x))
  (def Sy (Sv y))
  (def Sxx (Pvw x x))
  (def Sxy (Pvw x y))
  (def alpha (/ (- (* N Sxy) (* Sx Sy)) (- (* N Sxx) (* Sx Sx))))
  (def beta (/ (- (+ Sy) (* alpha Sx)) (+ N)))
  [alpha beta])

```

Figure 62: RegLin in Clojure

```

# Function
def Sv(v):
    sum = 0
    for i in v:
        sum = sum + i
    return sum

def Pv(v, w):
    pro = 0
    i=0
    while i < v.__len__():
        pro = pro + v[i] * w[i]
        i=i+1
    return pro

def Nv(v):
    return v.__len__()

# Main Function
def regLin(x, y):
    N = Nv(x)
    Sx = Sv(x)
    Sy = Sv(y)
    Sxx = Pv(x,x)
    Sxy = Pv(x,y)
    alpha = (N*Sxy-Sx*Sy) / (N*Sxx-Sx*Sx)
    beta = (Sy-alpha*Sx) / N
    return (alpha, beta)

```

Figure 63: RegLin in Python

26.27 Compare Clojure, Python and R coding styles (Use Librarie's languages)

```
(def x [1 2 3 4 5])
(def y [5 9 11 20 24])
```

Figure 64: RegLin in Clojure with Lib 1

```
(:coefs (linear-model y x))
;; => [-0.8999999999999915 4.9000000000000002]
```

Figure 65: RegLin in Clojure with Lib 2

```
In [3]: x
Out[3]: [[1], [2], [3], [4], [5]]

In [4]: y = [[5],[9],[11],[20],[24]]

In [5]: import numpy as np

In [6]: from sklearn.linear_model import LinearRegression

In [7]: model = LinearRegression()

In [8]: model = LinearRegression().fit(x, y)

In [9]: model.intercept_
Out[9]: array([-0.9])

In [10]: model.coef_
Out[10]: array([[4.9]])
```

Figure 66: RegLin in Python with Lib

```
> x <- c(1 2 3 4 5)
Error: unexpected numeric constant in "x <- c(1 2"
> x <- c(1, 2, 3, 4, 5)
> y <- c(5, 9, 11, 20, 24)
> lm(formula = y ~ x)

call:
lm(formula = y ~ x)

Coefficients:
(Intercept)          x
          -0.9           4.9

> |
```

Figure 67: RegLin in R with Lib

Check this example in WebR REPL online (3 different lines) :

Type : $x < -c(-2, -1, 1, 2)$ $y < -c(-1, -2, 2, 1)$ $lm(formula = y \sim x)$ (tilde between y and x)

<https://docs.r-wasm.org/webr/latest/#try-it-out>

26.27.1 Simulateurs

Simulateur Online circuits électriques (méthode des noeuds) (voir exercice pont en H)

Site : Prof. Dr. Ing. A. Valdivia, Jade Hochschule

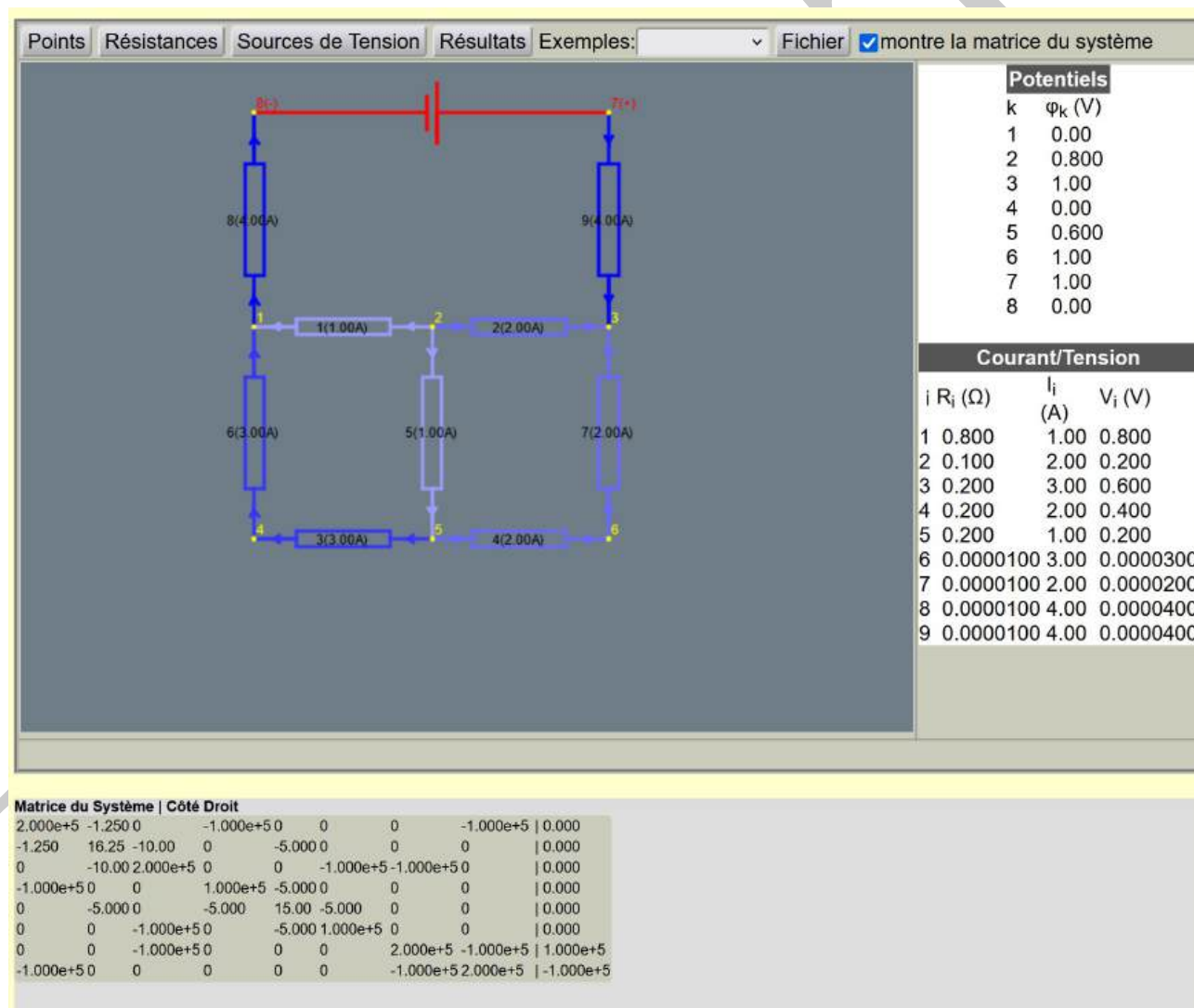
https://valdivia.staff.jade-hs.de/knotenpotentialverfahren_fr.html

Et plein d'autres simulateurs gratuits sur le même site :

https://valdivia.staff.jade-hs.de/js_fr.html

Cette page contient une compilation de différents calculs techniques et mathématiques, programmés en Java ou JavaScript. Pour pouvoir utiliser les applications Java, il faut installer Java. Les applications Java sont ensuite installées localement en décompressant une archive et lancées à l'aide de scripts batch. Elles ne nécessitent pas de navigateur web, mais fonctionnent comme des programmes autonomes.

Les applications JavaScript, en revanche, ne peuvent être lancées qu'à l'aide d'un navigateur web. Aucune autre préparation n'est nécessaire si l'on n'a pas bloqué JavaScript par les paramètres du navigateur.



Autant dire que l'on a la réponse en quelques minutes. Avec ce programme on devait introduire les valeurs en Ohm. Donc on a juste inversé les valeurs des conductances. Attention parfois ce genre de logiciel n'aime pas que l'on mette une résistance de 0 Ohm pour un fil et reporte une erreur. Il vaut mieux mettre une valeur négligeable comme $R_{fil} = 0.00001\Omega$!

27 A savoir par coeur (uniquement pour moi, chacun son truc)

Intégrer les notations mathématiques...

27.1 base unaire, binaire et compléments à 2, half adder, full adder equation

27.2 Méthode de Cramer avec 2 inconnues

On peut aussi résoudre par substitution, élimination ou inversion matricielle, mais ça serait trop laborieux. Si on a la méthode de Cramer 2D en tête je trouve que c'est beaucoup plus direct car il n'y a quasiment pas de manipulations algébriques, mais attention aux signes !

Si $ad - bc \neq 0$, le système

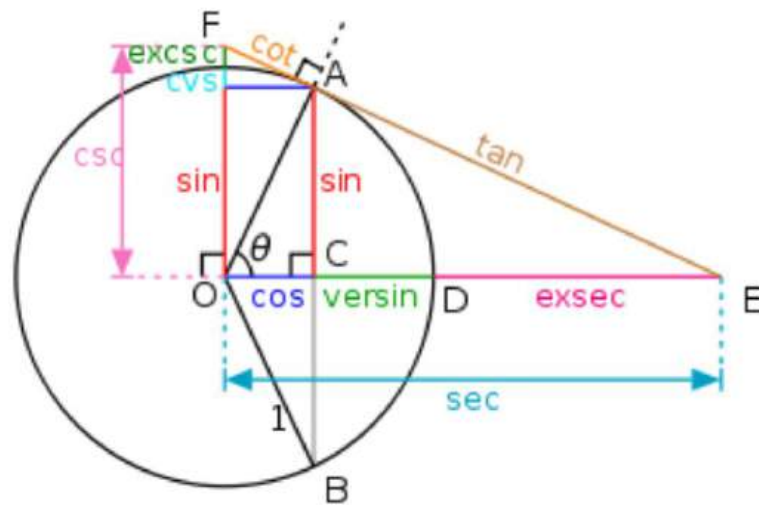
$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

a pour unique solution :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}.$$

27.3 Le cercle trigonométrique et les principales fonctions associées

On imagine le cercle avec le triangle inclus habituel (comme pour représenter les complexes) ainsi qu'un triangle partant vers la droite (comme pour la visualisation du théorème de la hauteur). Ou se situent, la sécante, la cosécante, l'exsécante et la tangente sur ce dessin.



Que veulent dire : exsec, versin, cos, sec. (étymologie) ? Ajouter démo pythagore, hauteur, aire tri qqc, lois cos, lois sin etc. Double angle au centre cercle, surface tri quelc, théo sin, théo cos, théo pyth, haut (preuves), tracer compas racines entiers etc.

27.4 Identités trigo, limites de bases etc.

co (angle complémentaire) : cosinus = sinus angle complémentaire

$$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1, \text{ somme des carrés du cosinus et du sinus}$$

$$\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) \text{ et } 1 - \sin^2(x) = \cos^2(x), \text{ toujours positif}$$

$$\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1 = (\text{à vérifier})$$

$$\cot^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x) - 1 = (\text{à vérifier})$$

$$\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x), \text{ différence des carrés du cosinus et du sinus}$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - (1 - \cos^2(x)) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) + (\sin^2(x) - \sin^2(x)) = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$\sin(x+h) = \sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2}, \text{ qui est toujours positif}^{33}$$

³³La puissance active d'un signal dans une impédance résistive étant ce signal élevé au carré, cela reste un signal sinusoïdal, mais toujours positif. De plus la relation trigonométrique nous montre qu'elle est de fréquence double.

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$$

$$\frac{d}{dx}|x| = \frac{x}{|x|} = \frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

27.5 At first, what is a fraction ? Is dy/dx a fraction ?

A fraction is a part of a whole : dy/dx is not a fraction and is obtained with a limit calculus but it behaves as a fraction, especially in the differential : $dy = f(x)'dx$ which gives an approximation of the increment of $f(x)$ at the point x for a small dx . (see blackPenRedPen)

27.6 What the difference between d/dx , dy/dx ?

If $y(x) = f(x)$ then d/dx or $d[f(x)]/dx$ tells us what to do, that is to say, derivate the fonction $f(x)$ with respect to x , for instance (e.g.) : d/dx , $d[.]/dx$, $d(f(x))/dx$, finally $d[2x + 3]/dx$.

dy/dx tells us that this is the result of the derivative of $f(x)$ in others words $f(x)'$, in our case $dy/dx = 2$ (see The Organic Chemistry Tutor).

Do not forget that y could be written in another form, e.g. $d[\sin(y)]/dx$ where $y = f(x) = x + 1$ so : $d[\sin(y)]/dx = \cos(y)dy/dx = \cos(x + 1) + 1$ (Chain rule).

27.7 What the difference between df/dx and partial df/dx ?

df/dx is used when f and y depend of x (one dependant variable and one independant variable) and can be written like this : $d[f(x, y(x))]/dx$. It is the case when equation is written in an implicit form e.g. $f(x, y) = y^2 + x^2 - 5 = 0$ (implicit form for a part of a circle, for example for $x > 0$ and $y > 0$. (Apply chain rule).

df/dx is a partial derivative e.g. f is function of two separated (independant) variables (surface over the plan XY), $y = f(x, y) = y^2 + x^2 - 5$. In df/dx (y is like a constant) (See my documents EMequations).

27.8 What the difference and derivative and integral in terms of indetermined form

Another way to see these two kind of operations is to see :

the derivative as the action of making determinate a $\frac{0}{0}$ form, and the integration as the action of making determinate a $0 \times \infty$ form.

27.9 Implicit derivative

Derivate the two members of the equation $F(x, y) = G(x, y)$ or all the equation according to x . Do not forget the internal derivative for $y(x)$ included in the equation. Solve for $\frac{dy}{dx}$!

Or use the following relation on $F(x, y) = 0$ where $y = cst$ in the numerator and $x = cst$ in the denominator.

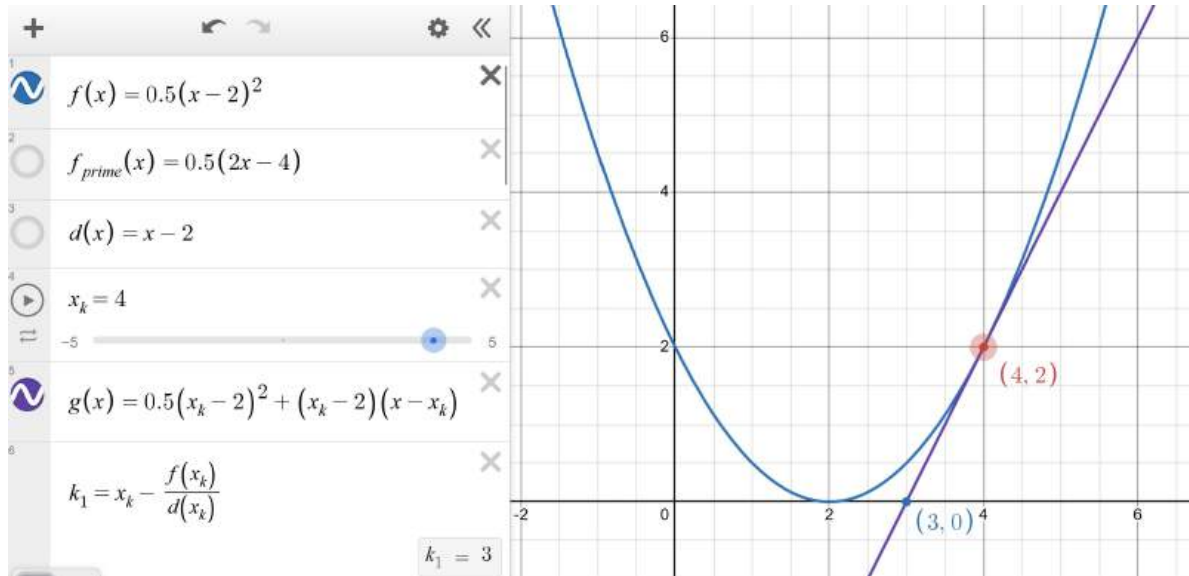
$$\frac{dF(x_0, y_0)}{dx} = -\frac{\partial F_x(x_0, y_0)}{\partial F_y(x_0, y_0)}$$

Voir vidéos "implicit" (Prof. Herbert Gross, Brilliant, wiki, MIT, revisited etc.)

27.10 Newton-Raphson method for finding a zero of a function

- Soit à chercher x pour que la fonction $y=f(x)=0$
- Ou x pour un y donné dans une forme implicite $F(x,y)$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$



27.11 Derivative of the reciprocal function f^{-1}

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'(f^{-1})}$$

Comment simplifie-t-on si :

$$(\sin^{-1})' = \frac{1}{\cos(\sin^{-1})}$$

Voir vidéo "Parametric and Implicit Differentiation"

27.12 Dérivée fonctions composées $f(g(x))'_x$

$$f(g(x))'_x = (f(g))'_g (g(x))'_x$$

27.13 Parametric differentiation, what the advantage of the parametric form

Exemple : équation paramétrique d'un cercle (**Parler des dérivées d'ordre supérieur**)

$$x = \cos(t) = f(t)$$

$$y = \sin(t) = g(t)$$

$$x'_t = -\sin(t)$$

$$y'_t = \cos(t)$$

d'où la dérivée de y par rapport à x (c'est la même formule que pour la dérivée implicite et le résultat est sous forme implicite) :

$$\frac{y'_t}{x'_t} = (y)_x = \frac{\cos(t)}{-\sin(t)} = -\frac{x}{y}$$

La forme paramétrique permet de suivre un point dans le plan en fonction d'une troisième variable. Cela peut être la trajectoire d'un corps ponctuel en fonction du temps. Dans ce cas la dérivée $\frac{dy}{dx}$ est la tangente à la trajectoire, donc la variation de la coordonnée y en fonction de la variation de la coordonnée x . Il ne s'agit pas de la vitesse, car pour obtenir cette dernière il faudra considérer x et y comme étant les composantes d'un vecteur position \vec{r} et la vitesse \vec{v} sera composé des dérivées des composantes de \vec{r} par rapport au temps (Attention, pas \vec{V} de \vec{r}). Voir vidéo "Parametric and Implicit Differentiation", "Finding the third derivative".

27.14 Différence entre primitives et antidérivée

On peut dire que t , $t + 1$ et $t + 2$ ont toutes la même dérivée, $f=1$. Les primitives F de f sont donc de la forme $F = t + C$. Réciproquement on aimerait une opération de retour qui nous donne une réponse unique. Dans ce sens l'antidérivée est une des primitives $f=1$ sans la constante, $F = t$. En réalité l'intégrale d'une fonction unique a une infinité de possibilités, c'est une autre fonction définie à une constante près (cette constante disparaît lors de l'opération de dérivation).

27.15 Donner la solution d'une EDO linéaire du 1er ordre sans second membres, solution homogène

$$y' + K(x)y = 0$$
$$y_{hom} = C_{hom} e^{-\int K(x)dx}$$

On rappelle qu'il ne faut pas mettre de constante en intégrant $K(x)$, on en a déjà tenu compte dans la constante C_{hom} , il faut mettre l'antidérivée de $K(x)$.

Voir l'équivalent pour les différentielles et les intégrales. Faire des recherches avec les mots clés "implicit, reciproque etc".

• règle de Newton implicit diff

1) $\sin(x+y) = y^2 \cos(x)$
 $\cos(x+y) \cdot (1+y') = 2y y' \cos x + y^2 (-\sin x)$
 $\cos(x+y) - y^2 (-\sin x) = 2y y' \cos x - y' \cos(x+y)$
 $= y' (2y \cos x - \cos(x+y))$
 $\Rightarrow y' = \frac{-y^2 \sin x + \cos(x+y)}{2y \cos x - \cos(x+y)}$

2) $f' = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$ $f = \sin(x+y) - y^2 \cos x = 0$
 $= -\frac{\cos(x+y) - y^2 (-\sin x)}{\cos(x+y) - 2y \cos x} = \frac{y^2 \sin x + \cos(x+y)}{2y \cos x - \cos(x+y)}$

• réciproque dérivée

$[f^{-1}]'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$ $f = \sin(x)$
 $f' = \cos(x)$

$f'_i = [\sin^{-1}(a)]' = \frac{1}{\cos(\arcsin(a))}$
D'après la table
 $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \left[-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right]$

$(f'_i)^2 = \frac{1}{\cos^2(\arcsin(x))} =$
 $\frac{1}{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \frac{1}{1-x^2} \Rightarrow f'_i = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

• dérivation fonction composée

$(f \circ g)' = f(g(x)) = f'_g(g) \cdot g'_x$
 $(f \circ f^{-1})' = f(f^{-1})' = f'_f(f^{-1}) \cdot (f^{-1})'_x = 1$
 $\Rightarrow (f^{-1})'_x = \frac{1}{f'_f(f^{-1})}$
 $(x)' = 1$

27.16 EDO linéaires homogènes séparation des variables

Quelles sont les deux versions les plus simples ? Existe-t-il des EDO homo. et non-homo. avec des formes plus simples ? **Attention, erreur au bas de la feuille**

ED variables séparables - $\frac{dy}{y} = G(x) dx$ ou $y dy = G(x) dx$

I) $y' + K(x)y = 0$ $\frac{dy}{y} + K(x) dx = 0$

$\frac{dy}{y} = -K(x) dx$

$\int \frac{dy}{y} = -\int K(x) dx$

$\ln|y| + A = -\int K(x) dx$

$e^{\ln|y| + A} = e^{-\int K(x) dx} = y_h \cdot e^A$

$y_h = C_h e^{-\int K(x) dx}$ C_h ou C

$y' + \ln(x)y = 0$ $y_h = C_h e^{-\int \ln x dx}$

$\int (\ln(x) dx) = uv - \int du v$

v	du	$=$	$x \cdot \ln x - \int \frac{1}{x} dx \cdot x$
$\ln(x)$	1	$=$	$x \ln x - x + C$
$\frac{dv}{dx}$	u	$=$	$\frac{x(\ln - 1) + C}{-x(\ln - 1)}$
$\frac{1}{x} dx$	x	$=$	$y_h = C e^{-x(\ln - 1)}$
1	1	$=$	

$-C e^{x(\ln - 1)} \cdot [x^{(\ln - 1) + 1} + x(\frac{1}{x}(\ln - 1))] + \ln C e^{x(\ln - 1)} = 0$

$-C e^{x(\ln - 1)} \frac{\ln(x)}{\ln(x)} + C e^{x(\ln - 1)} = 0$

II) $y' + K(x)y^{-1} = 0$ $y dy = -K(x) dx$ (règle)

$y_h = \sqrt{-2 \int K(x) dx}$ ($\frac{dx}{dt} = a \cdot t$)

Oui, sans le terme en y on trouve la fonction constante. Si on a une constante et/ou autre fonction de x au second membre on aura une fonction linéaire/autre fonction de x . Il s'agit de l'opération d'anti-dérivée.

27.17 EDO linéaires inhomogènes variation des constantes

$$y' + K(x)y = S(x)$$

var. const $y_g = C(x) y_h$ où $y_h = e^{-\int K(x) dx}$

$$y_g' = C' y_h + C y_h'$$

$$C(x) y_h' + C(x) y_h' + K(x) C(x) y_h = S(x)$$

$$C(x) (y_h' + K(x) y_h) + C(x) y_h = S(x)$$

$$\Rightarrow C(x) + C_1 = \int \frac{S(x)}{y_h} dx$$

$$\Rightarrow y_g = \left[\int \frac{S(x)}{y_h} dx + C_1 \right] y_h$$

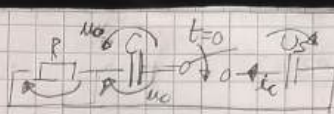
où $y_h = e^{-\int K(x) dx}$

$\Rightarrow y_h' + K(x) y_h = 0$
C'h sera incluse plus tard dans une autre constante !

27.18 EDO linéaires inhomogènes RC avec facteur intégrant

Quel est l'avantage ? Que faut-il pour résoudre complètement le problème de Cauchy ?

Facteur intégrant II



28.12.23

$$u_c + RC u_c' = u_s \quad (u = u_c)$$

$$u' + p(x)u = q(x) \quad \text{Forme}$$

$$u + \frac{1}{RC} u = \frac{1}{RC} u_s$$

$$p(t) = e^{\int p(x) dx} = e^{\int \frac{1}{RC} dt}$$

$$\left(e^{\frac{t}{RC}} \cdot u' + \frac{1}{RC} e^{\frac{t}{RC}} \cdot u \right) = e^{\frac{t}{RC}} \frac{u_s}{RC}$$

$$\int \left(\frac{e^{\frac{t}{RC}} \cdot u}{e^{\frac{t}{RC}} \cdot u} \right) \cdot dt = \int e^{\frac{t}{RC}} \frac{u_s}{RC} dt$$

$$\frac{d}{dt} (e^{\frac{t}{RC}} \cdot u) = (e^{\frac{t}{RC}} \cdot u)'$$

$$d(e^{\frac{t}{RC}} \cdot u) = (e^{\frac{t}{RC}} \cdot u) dt$$

$$u = e^{-\frac{t}{RC}} \cdot u_s \int \frac{1}{RC} e^{\frac{t}{RC}} dt = e^{-\frac{t}{RC}} u_s (e + C_1)$$

! (u = u_c) $u_c = u_s (1 + C_1 e^{-\frac{t}{RC}})$

$$u_c(0) = u_s (1 + C_1 e^0) = u_0$$

$$= u_s (1 + C_1)$$

$$\Rightarrow C_1 = u_0 - u_s$$

$$u_c(t) = u_s (1 + (u_0 - u_s) e^{-\frac{t}{RC}})$$

pas besoin de passer par y_h et y_g part

Pas besoin des sol. interméd. ou de savoir form. de l'EDO lin. 1er deg. inhom. ! Autres facteurs pour ED plus complexes ? Les cond. init. (ou de la dérivée ?) ou cond. aux lim. ?

27.19 Mnémo pour retenir les dérivées de $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\tan(x)$

Toutes les dérivées des opérations contenant le préfixe "co" (pour angle complémentaire) auront un signe négatif par rapport au dérivée des fonctions originales.

$$\sin'(x) = \frac{d}{dx} \sin(x) = \sin^{(1)}(x) = \text{son meilleur copain sous sa forme la plus simple} = \cos(x)$$

$$\cos'(x) = \frac{d}{dx} \cos(x) = \cos^{(1)}(x) = -\sin(x)$$

$$\tan'(x) = \frac{d}{dx} \tan(x) = \tan^{(1)}(x) = (\text{best friend, pér., tj pos, pair, } \tan'(0)=\min=1) = \sec(x)^2$$

$\tan(x)$ a tj. une pente positive, le minimum de cette dernière vaut 1, à l'origine, c'est la **sécante au carré**, **sorte de parabole** avec un offset de 1.

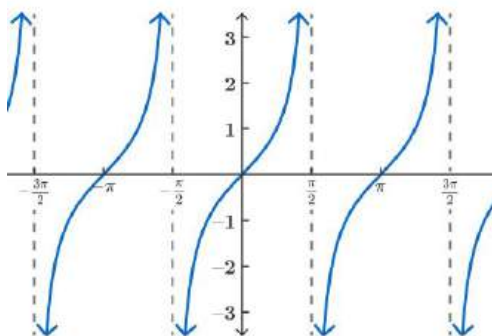


Figure 68: Fonction tangente

$$\cot'(x) = \cotan'(x) = \frac{d}{dx} \cot(x) = \cot^{(1)}(x) = \text{forme cot : penser ang comp (déc } \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{cosec}(x)^2$$

$$\sec'(x) = \frac{d}{dx} \sec(x) = \sec^{(1)}(x) = \sec(x)\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$\operatorname{cosec}'(x) = \frac{d}{dx} \operatorname{cosec}(x) = \operatorname{cosec}^{(1)}(x) = -\operatorname{cosec}(x)\cotan(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$$

27.20 $\ln'(1+x)$, $(\frac{1}{1+x})'$, $\arctan'(x)$, $\operatorname{arccot}'(x)$, $\ln'(|x|)$, $\arcsin'(x)$, $\arccos'(x)$

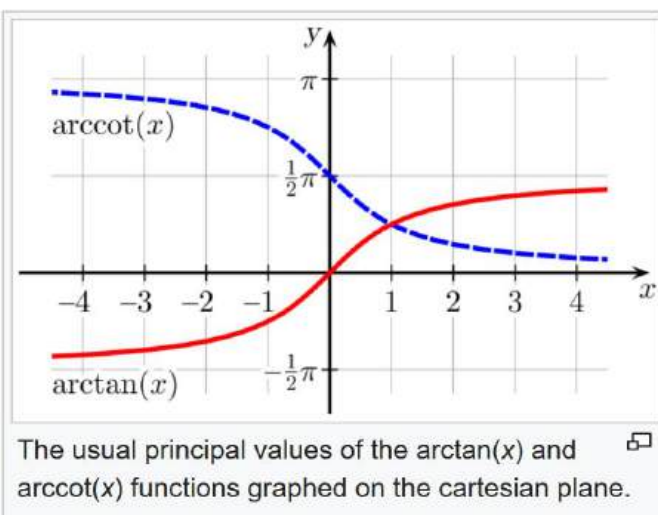


Figure 69: Fonction $\arctan(x)$, $\operatorname{arccot}(x)$

$\arctan(x)$ forme arctan : penser à la réciproque (basculement)

$\operatorname{arccot}(x)$ forme arccot : penser ang comp (déc $\frac{\pi}{2}$)

Et les dérivées associées au titre de ce chapitre : $\frac{1}{1+x}$, $-\frac{1}{(1+x)^2}$, $\frac{1}{1+x^2}$, $-\frac{1}{1+x^2}$, revoir les signes !

$$\ln'(|x|) = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}$$

Pour les arc' voir principes avec les changements de variables en utilisant les triangles rectangles et pythagore.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Sur la figure ci-dessous on peut voir la reconstruction de la fonction arccot(x) par intégration, c'est à dire -arctan(x) à une constant près, coupée en deux morceaux. Ne pas oublier que tan(x) est impaire et strictement croissante, par contre cot(x) est aussi impaire mais strictement décroissante. Pour étudier ces fonctions inverses il faut voir ce qu'on prend comme valeurs principales (ci-dessous on a pris de -pi sur deux à pi sur deux :

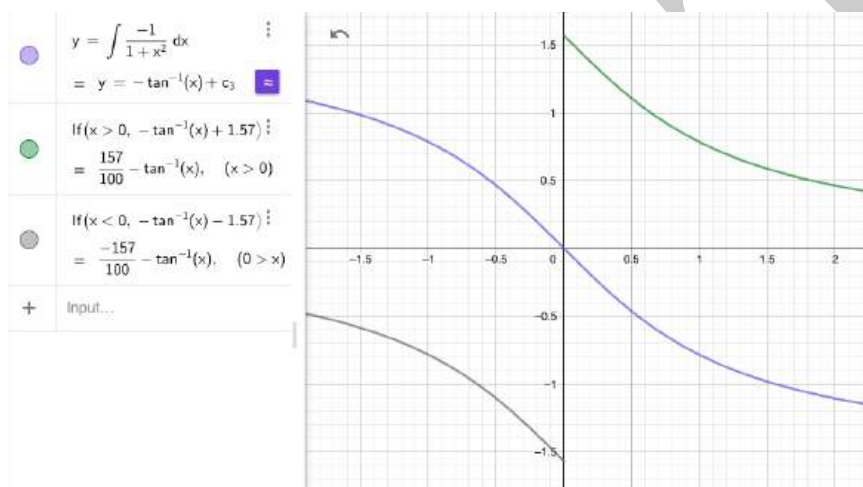


Figure 70: Fonction -arctan(x), -arctan(x)+Cst, arccot(x)

Formulaire, présentation ci-dessous à refaire, et vérifier résultats ??

$$\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{d}{dx} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{d}{dx} \arcsin(x) \int x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C \int \text{BigMess}$$

$x \rightarrow 0$

27.21 Antidérivées $\frac{1}{x}$, $\ln(x)$, $\tan(x)$, $\cot(x)$, $\sec(x)$, $\csc(x)$, et que dire de e^x , $\sin(x)$, $\cos(x)$

$\ln(|x|)$, $x(\ln(x) - 1)$, $\ln(|\sec(x)|) = -\ln(|\cos(x)|)$, $\ln(|\sin(x)|) = -\ln(|\csc(x)|)$, $\ln(|\sec(x) + \tan(x)|) + C$, $\ln(|\csc(x) - \cot(x)|) + C$, revoir les signes ! Ces fonctions ont un lien privilégié (voir développement de Feynman), elles se dérivent infiniment sur elles mêmes, cycles, périodes ou sur une version décalée de $\pi/2$!

27.22 Tables fonctions, dérivées

Dérivées logarithmiques ? Et quid des fonctions hyperboliques ?

Fonction	Dérivée	Ejemplo
$f(x) = \text{sen}(u)$	$f'(x) = \cos(u) \cdot u'$	$f(x) = \text{sen}(x^6) \rightarrow f'(x) = \cos(x^6) \cdot 6x^5$
$f(x) = \cos(u)$	$f'(x) = -\text{sen}(u) \cdot u'$	$f(x) = \cos(6x^4) \rightarrow f'(x) = -\text{sen}(6x^4) \cdot 24x^3$
$f(x) = \tan(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{\cos^2(u)}$ $= (1 + \tan^2(u)) \cdot u'$	$f(x) = \tan(2x^2) \rightarrow f'(x) = \frac{4x}{\cos^2(2x^2)}$
$f(x) = \sec(u)$	$f'(x) = \frac{u' \cdot \text{sen}(u)}{\cos^2(u)}$	$f(x) = \sec(3x) \rightarrow f'(x) = \frac{3 \cdot \text{sen}(3x)}{\cos^2(3x)}$
$f(x) = \text{cosec}(u)$	$f'(x) = -\frac{u' \cdot \cos(u)}{\text{sen}^2(u)}$	$f(x) = \text{cosec}(x^5) \rightarrow f'(x) = -\frac{5x^4 \cdot \cos(x^5)}{\text{sen}^2(x^5)}$
$f(x) = \text{cotg}(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{\text{sen}^2(u)}$	$f(x) = \text{cotg}(5x^2) \rightarrow f'(x) = -\frac{10x}{\text{sen}^2(5x^2)}$
$f(x) = \arcsen(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$f(x) = \arcsen(7x) \rightarrow f'(x) = \frac{7x}{\sqrt{1-(7x)^2}}$
$f(x) = \arccos(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$f(x) = \arccos(3x) \rightarrow f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-(3x)^2}}$
$f(x) = \arctan(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{1+u^2}$	$f(x) = \arctan(6x) \rightarrow f'(x) = \frac{6}{1+(6x)^2}$
$f(x) = \text{arcsec}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2-1}}$	$f(x) = \text{arcsec}(2x) \rightarrow f'(x) = \frac{2}{2x \cdot \sqrt{(2x)^2-1}}$
$f(x) = \text{arccosec}(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2-1}}$	$f(x) = \text{arccosec}(5x) \rightarrow f'(x) = -\frac{5}{5x \cdot \sqrt{(5x)^2-1}}$
$f(x) = \text{arccotg}(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{1+u^2}$	$f(x) = \text{arccotg}(x^2-1) \rightarrow f'(x) = -\frac{2x}{1+(x^2-1)^2}$
$f(x) = \text{senh}(u)$	$f'(x) = \cosh(u) \cdot u'$	$f(x) = \text{senh}(x^3-2x) \rightarrow f'(x) = \cosh(x^3-2x) \cdot (3x-2)$
$f(x) = \cosh(u)$	$f'(x) = \text{senh}(u) \cdot u'$	$f(x) = \cosh(3x^2) \rightarrow f'(x) = \text{senh}(3x^2) \cdot 6x$
$f(x) = \tanh(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{\cosh^2(u)}$ $= (1 - \tanh^2(u)) \cdot u'$	$f(x) = \tanh(3x^3) \rightarrow f'(x) = \frac{9x^2}{\cosh^2(3x^3)}$
$f(x) = \text{sech}(u)$	$f'(x) = -\text{sech}(u) \cdot \tanh(u) \cdot u'$	$f(x) = \text{sech}(8x) \rightarrow f'(x) = -\text{sech}(8x) \cdot \tanh(8x) \cdot 8$
$f(x) = \text{cosech}(u)$	$f'(x) = -\text{cosech}(u) \cdot \text{cotgh}(u) \cdot u'$	$f(x) = \text{cosech}(x^2) \rightarrow f'(x) = -\text{cosech}(x^2) \cdot \text{cotgh}(x^2) \cdot 2x$
$f(x) = \text{cotgh}(u)$	$f'(x) = -\text{cosech}^2(u)$	$f(x) = \text{cotgh}(11x) \rightarrow f'(x) = -\text{cosech}^2(11x) \cdot 11$
$f(x) = \text{arcsenh}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{u^2+1}}$	$f(x) = \text{arcsenh}(3x) \rightarrow f'(x) = \frac{3}{\sqrt{(3x)^2+1}}$
$f(x) = \text{arccosh}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$	$f(x) = \text{arccosh}(7x) \rightarrow f'(x) = \frac{7}{\sqrt{(7x)^2-1}}$
$f(x) = \text{arctanh}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{1-u^2}$	$f(x) = \text{arctanh}(3x-1) \rightarrow f'(x) = \frac{3}{1+(3x-1)^2}$
$f(x) = \text{arcsech}(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{u \cdot \sqrt{1-u^2}}$	$f(x) = \text{arcsech}(9x^3) \rightarrow f'(x) = -\frac{27x^2}{9x^2 \cdot \sqrt{1-(9x^3)^2}}$
$f(x) = \text{arccsch}(u)$	$f'(x) = -\frac{u'}{u \cdot \sqrt{1+u^2}}$	$f(x) = \text{arccsch}(10x) \rightarrow f'(x) = -\frac{10}{10x \cdot \sqrt{1+(10x)^2}}$
$f(x) = \text{arcoth}(u)$	$f'(x) = \frac{u'}{1-u^2}$	$f(x) = \text{arcoth}(6x^5) \rightarrow f'(x) = \frac{30x^4}{1-(6x^5)^2}$

27.23 Tables fonctions, dérivées suite

Erreur au niveau de la dérivée de $\text{LOG}_{10}(x)$

Approximation de Padé loi normale pour intégration

$$y(x) \approx \frac{A_0 + A_1x + A_2x^2}{1 + B_1x + B_2x^2}$$

Table dérivée

Fonction	Dérivée	Condition
k (<i>constante</i>)	0	
ax	a	
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \neq 0$
x^n	nx^{n-1}	
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$x \neq 0$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in]-1; 1[$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in]-1; 1[$
$\arctan x$	$\frac{1}{(1+x^2)^2}$	
$\text{sh } x$	$\text{ch } x$	
$\text{ch } x$	$\text{sh } x$	
$\text{th } x$	$\frac{1}{\text{ch}^2 x}$	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\log_{10} x$	$\frac{\ln x}{\ln a}$	$x > 0, a > 0,$ $a \neq 1$
e^x	e^x	
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$

27.24 Tables fonctions, dérivées et primitives

Connaissant $f(x)$, $f'(x)$ et $F(x)$, dérivée et intégrale de $1/f(x)$, de $f^{-1}(x)$ et f implicite. Tracer intégrale $\arctan(x)$, pourquoi est-elle symétrique et positive alors que A est (-) pr x ; 0 ?

Fonctions	Dérivées	Primitives
$f(x)$	$f'(x)$	$\int f(x)dx$
x^3	$3x^2$	$\frac{x^4}{4} + \lambda$
e^{ax}	ae^{ax}	$\frac{e^{ax}}{a} + \lambda$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x \ln x - x + \lambda$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + \lambda$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + \lambda$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\ln \sec x + \lambda$
$\cot x$	$-\csc^2 x$	$\ln \sin x + \lambda$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2} + \lambda$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + \lambda$
$\arctan x$	$\frac{1}{x^2+1}$	$x \arctan x - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + \lambda$
$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{(x-1)(x+1)\sqrt{1-x^2}}$	$-\sqrt{1-x^2} + \lambda$
$\frac{\sin x}{\cos x + 1}$	$\frac{1}{\cos x + 1}$	$-\ln(\cos x + 1) + \lambda$
$\frac{\cos x}{\sin x + 1}$	$\frac{1}{\sin x + 1}$	$\ln(\sin x + 1) + \lambda$
$\frac{1}{e^x + e^{-x}}$	$-\frac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}$	$\arctan e^x + \lambda$
$\frac{1}{e^x - e^{-x}}$	$-\frac{e^x + e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^2}$	$\frac{\ln(e^x - 1)}{2} - \frac{\ln(e^x + 1)}{2} + \lambda$

$$\frac{1}{\ln(a)\sqrt{x^2}} \int \Rightarrow \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \int \Rightarrow x \frac{\ln(x)}{\ln(a)} - \sqrt{x^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2}} \int \Rightarrow \operatorname{arccexp}(x) \int \Rightarrow x \operatorname{arccexp}(x) - \sqrt{x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} \int \Rightarrow \arctan(x) \int \Rightarrow x \arctan(x) - \ln(\sqrt{1+x^2})$$

$$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \int \Rightarrow \operatorname{arcsec}(x) = x \operatorname{arcsec}(x) - \ln(|x + \sqrt{x^2-1}|)$$

$$\int \operatorname{arccsc}(x) = x \operatorname{arccsc}(x) + \ln(|x + \sqrt{x^2-1}|)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int \Rightarrow \arcsin(x) = x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$$

$$\int \sin^2(x) = \int \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\sin(2x)}{2}\right)$$

$$\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x) \int \Rightarrow \tan(x) \int \Rightarrow \ln(\sec(x))$$

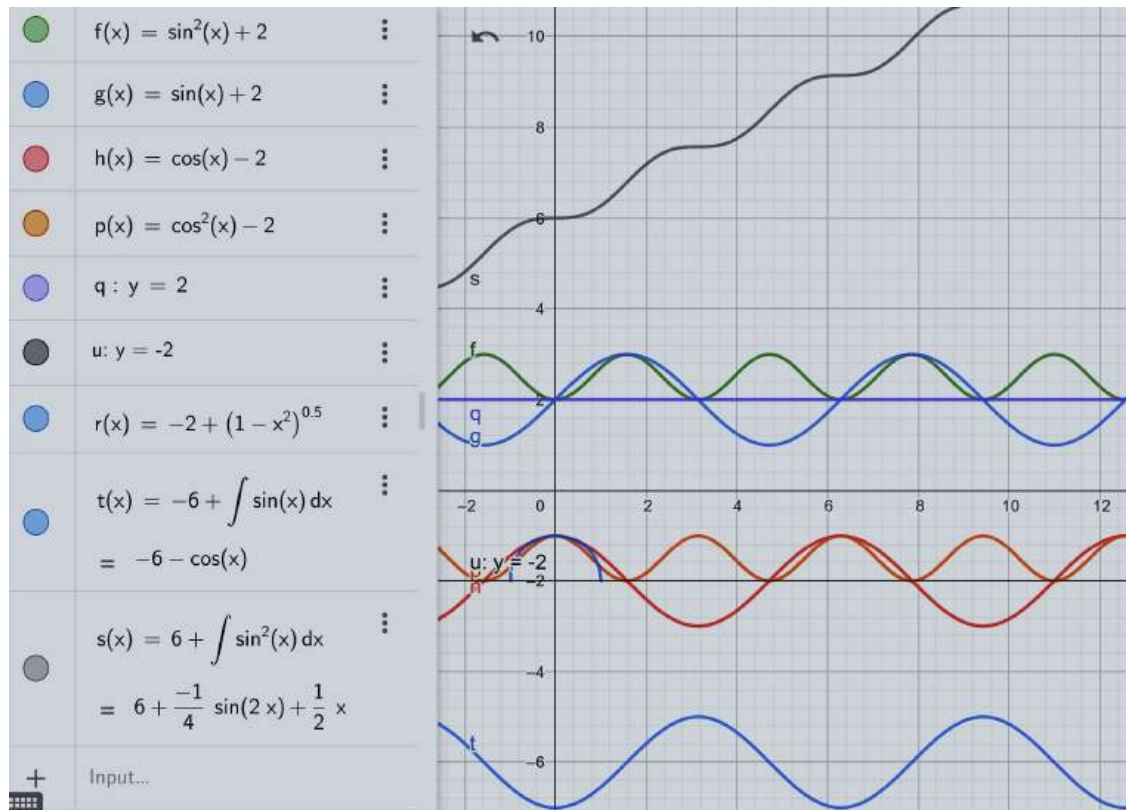
$$\sec(x)\tan(x) \int \Rightarrow \sec(x) \int \Rightarrow \ln(|\sec(x) + \tan(x)|)$$

$$\int \sec^3(x) = \frac{1}{2}\left(\sec(x)\tan(x) + \ln(|\sec(x) + \tan(x)|)\right)$$

$$\int \csc^3(x) = -\frac{1}{2}\left(\csc(x)\operatorname{ctg}(x) + \ln(|\csc(x) + \operatorname{ctg}(x)|)\right)$$

27.25 Le rôle important de la sinusoïde et de la puissance dissipée

Quelle est la forme de l'intégrale du carré d'une sinusoïde (puissance). Quelle est la valeur moyenne sur une demie-période ?



27.26 Quel est le principe de l'intégration par partie ?

27.27 Quel est le principe de l'intégration par substitution ?

Intégration curviligne, pourquoi ne peut-on pas se passer de Pythagore ?

27.28 What is the meaning of reLu function, from which others functions is it derived, write the details

$reLu(x)$ returns 0 if x is smaller than 0 or x in others cases.

$max(a, b) : reLu(x) = max(0, x)$

$max(a, b) = 1/2((a + b) - abs(a - b))$

27.29 Quel est l'algorithme de calcul d'une racine carrée ?

$Y_{n+1} = 1/2(X/Y_n + Y_n)$, exemple avec chiffres simples : à la fin on a $2 = 1/2(4/2 + 2)$. Si c'est un irrationnel on s'approchera de plus en plus de la racine.

27.30 Citer une conséquence très importante des fonctions paires ?

Elles n'ont pas de fonctions réciproques, à l'origine?

27.31 Identités remarquables intéressantes

Téléscopage :

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$$

27.32 Loi binômiale : forme simplifié avec puissance 7

Nombres de termes : puissance + 1 = 8

$$(a + b)^7 = 1a^7b^0 + 7a^6b^1 + \dots + 1a^0b^7$$

27.32.1 Calcul de coefficients I : Règle de Newton

$$C_0 = 0$$

C_k pour $k > 0$: Multiplier le coefficient précédent par la puissance de a précédente et diviser par la position (sauf position 0, $k=0$).

$$(a + b)^7 = 1a^7b^0 + [(1 * 7/1) = 7]a^6b^1 + [(7 * 6/2) = 21]a^5b^2 + [(21 * 5/3) = 35]...$$

27.32.2 Calcul des coefficients II : Triangle de Pascal

$$\begin{array}{c} 1 \\ 121 \\ 1331 \end{array}$$

etc.

27.32.3 Loi binômiale et calcul des coefficients III

$$(a + b)^n = a^n b^0 + \frac{n!}{(n-k)!(k)!} a^{n-k} b^k + \dots$$

$$(a + b)^n = a^n b^0 + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots$$

27.32.4 Nombres de termes degré 2

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2 termes au carré = 2 termes + 2 termes mais commutatifs alors = 2 termes + 1 = 3

Sans commutativité => nbr de terme au carré !

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Différence de 2 termes au carré et relation avec identité précédente :

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = (a + b)^2 - 4ab$$

3 termes au carré :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2a(b + c) + b^2 + 2b(c) + c^2$$

autre forme :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

4 termes au carré :

$$(a + b + c + d)^2 =$$

4 + 3 + 2 + 1 = 10 termes

$$a^2 + 2a(b + c + d) + b^2 + 2b(c + d) + c^2 + 2c(d) + d^2$$

2 termes fois 2 termes = 4 termes, mais

$$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ca)x + abc$$

soit 2 termes fois 2 termes * 2 termes = 8 termes (soit 2 termes au cubes)

interesting...

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

27.33 Théorème des racines rationnelles

Soit un polynôme P tel que $P(x) = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + \dots + C_1 x + C_0$, P admet une racine rationnelle $r = \frac{p}{q}$ si p divise C_0 et q divise C_n . Les constantes p et q doivent être premiers entre eux. $(x - \frac{p}{q}) \dots = (qx - p) \dots = C_n x^n + \dots + C_0 x^0$

27.34 Série de Taylor et approximations (comparaison forme avec loi binômiale)

The Taylor series of any polynomial is the polynomial itself.

$$T_a(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots$$

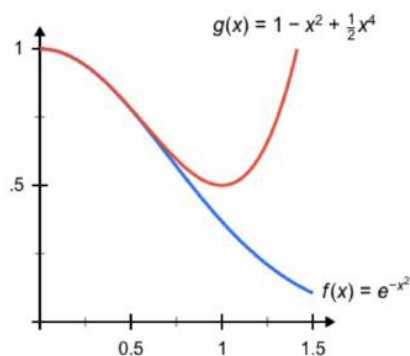
ou les coefficients valent

$$C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

27.35 Approximation de Taylor ordre 4 pour Gauss

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

for all x, too.



From the plot, it looks like just the first three terms

$$\frac{(-1)^0 x^0}{0!} + \frac{(-1)^1 x^2}{1!} + \frac{(-1)^2 x^4}{2!} = 1 - x^2 + \frac{1}{2} x^4$$

$$e^{x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{1}{2} x^4$$

Elle diverge complètement pour $x > 1$

27.36 Approximation de Padé

Forme de l'approximation de Padé ? Avantages ? Comment l'obtient-on ?

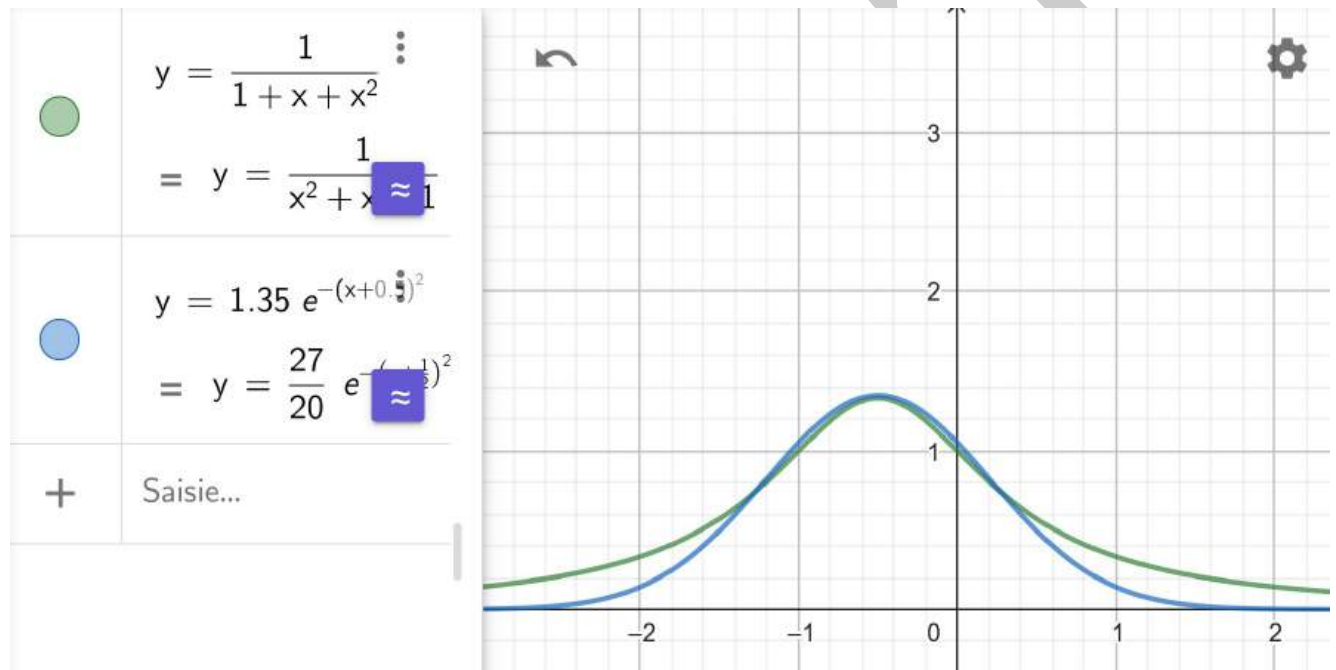
Lorsque x devient grand la valeur de $y(x)$ converge vers le rapport de deux polynômes, une constante, asymptote etc. Les séries de Taylors s'avèrent insuffisantes pour ce genre d'extrapolation.

$$y(x) \approx \frac{A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \dots + A_nx^n}{1 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + \dots + B_nx^n}$$

En premier lieu il faut calculer la série de Taylor associée à la $f(x)$ puis on ajoute l'approximant de Padé, on égalise et on cherche les termes par identification.

27.37 Approximation de Padé degrés (2;2) pour Gauss

A revoir, pas sûr des coefficients obtenus par chatGPT. En tout cas c'est mieux qu'une série de Taylor qui s'arrête au degré 4 car au moins elle part vers zéro !



Refaire l'approximation avec la valeur de l'écart type en paramètre.

27.38 Séries, sommes, suites arithmétiques, harmoniques, et géométriques

Attention aux indices.³⁴

27.38.1 Suites arithmétiques

Même forme qu'une parabole, diverge à l'infini :

$$S_n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

• Somme des n premiers entiers ou $n \in \mathbb{N}$

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

quelle méthode utiliser pour retrouver cette formule?

$d = \text{raison} = 1$, $S_1 = 1$, n : pair

$2S = \begin{matrix} 10 & 9 \\ +1 & 2 \end{matrix}$ $\frac{n}{2}$: nbr de paires de nbr $(1+10), (2+9) \dots$

• Somme des entiers de S_m à S_{m+n-1} de raison d .

I) formule sous la forme que je préfère :

Forme U_1 à U_n $U_m + U_{m+1} + \dots + U_{m+n-1}$ (U_m à U_{m+n-1}) U_1 à U_n
 U_0 à U_9 $U_m + (U_{m+1}) + \dots + (U_m + (n-1)d)$ U_0 à U_{n-1}
 $n \cdot U_m + [1+2+\dots+(n-1)]d$
 $= n \cdot U_m + \frac{(n-1)n}{2} \cdot d$ $n, m \in \mathbb{N}$, $U_m, d \in \mathbb{R}$

penser à 2 façons de grouper ces sommes en fonction de la parité de n , expliquer la formule

II) autre forme mieux factorisée

$$S = \frac{n}{2} (2a + (n-1)d)$$

où a est le 1er terme
 $a, d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

• Que peut-on déduire sur le résultat de ces sommes arithmétiques qui rappelle l'intégrale ?

On a des résultats en n^2 $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$

aire d'un triangle ou d'un carré

• Somme des n premiers impairs $\Rightarrow n^2$

• Somme des n premiers pairs $\Rightarrow n^2 + n$

mais on peut démontrer en passant par $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ car

³⁴En général on dit qu'on a n termes dont les indices des termes iront de 1 à n (1 à 10) ou de 0 à $(n-1)$ soit (de 0 à 9). La somme des dix premiers nombres entiers s'écrit $S_{1..10} = \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + 10$.

Ne pas oublier que la somme est la moyenne du premier terme et du dernier terme multiplié par le nombre de terme (voir si déjà inclus dans document). Vérifier si il y a assez d'explications plus loin. Autre forme utilisant la formule $1/2n(n+1)$, ou n est remplacé par $n-1$ (nbr de delta entre le 1er et le nième terme) $(n * Um + 1/2(n-1)((n-1)+1) * d)$

27.38.2 Suite harmonique, $\ln(n)$, constante d'Euler-Mascheroni γ

Même forme qu'un logarithme décalé, diverge à l'infini :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln(n) + \gamma$$

$$\gamma < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

<https://www.youtube.com/watch?v=4k1jegU4Wb4>
https://fr.wikipedia.org/wiki/S%C3%A9rie_harmonique

27.38.3 Formule suite géométrique, 2 versions, somme partielle et limite à l'infini

Formule pour la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $X < 1$ et n peut tendre vers l'infini). Si $X < 1$, n peut tendre vers l'infini car le terme devient de plus en plus petit.

$$(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X^2 + X + 1) = \frac{1 - X^n}{1 - X}$$

$$(X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X^2 + X^1 + X^0) = \frac{1 - X^n}{1 - X}$$

Formule pour la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $X < 1$ et n peut tendre vers l'infini). Si $X < 1$ n peut tendre vers l'infini car le terme devient de plus en plus petit.

$$(X^n + X^{n-1} + \dots + X^2 + X^1 + X^0) = \frac{1 - X^{n+1}}{1 - X}$$

27.39 Binôme de Newton, loi binômiale générale, factorielles

$$(a+b)^n = a^n b^0 + \frac{n}{1} a^{n-1} b^1 + \frac{n(n-1)}{2 * 1} a^{n-2} b^2 \dots + a^1 b^{n-1} + a^0 b^n$$

position 0, pos 1, pos 2

Coeff : équivalent à $\binom{n}{r}$ r parmi n (permutations), si négatif alternance positive négative, si rationnel, ne finit jamais ... $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ coef bin k parmi n , **à vérifier !**

Approximation du quadrant supérieur droit d'un cercle

$$y = (1 - x^2)^{0.5} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{9}{48}x^6 + \dots$$

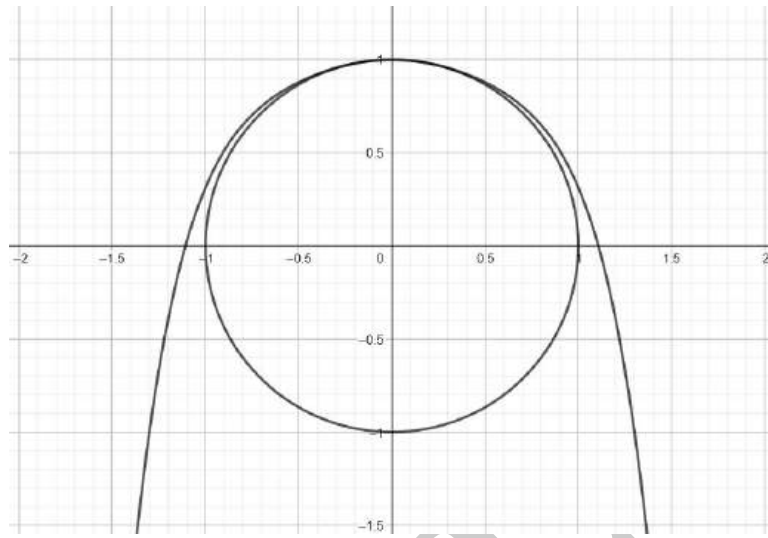


Figure 71: Suites arithmétiques

28 Index

Voir page suivante :

DRAFT

Index

- 0.999... = $0.\bar{9}$ = 1, preuve par limite, 58
- 0.999... = $0.\bar{9}$ = 1, preuve par équation, 58
- 4ème proportionnelle, 56

- Algorithm, prime reciprocal, 66
- Algorithme, 67
- Algorithme, PGDC, PPMV, nombre entiers, 65
- Approximation, 187
- Approximation de Padé, 186
- Approximations, 65
- Arrêt d'un algorithme, 65

- bases, écriture des nombres dans différentes, 44, 55
- Bayes, théorème, 62

- Calculabilité, infinité de décimale, 65
- Calculatrice, 219
- Combinaison fonctions non linéaires, 140
- Commande Latex, créer, 14
- Computability, 65
- Congruence, congru, modulo, 31
- Convergence, fractions continues, séries, suites, factorielles, 88
- Courbes, tracer machines locales, 225
- Courbes, tracer online, 220
- Cramer
 - avantages, 128
 - ne calculer que ce que l'on veut savoir, 128
- Cramer, méthode, 127, 131, 236

- Dilatation des fonctions, 102
- Dilatation vecteur, 160
- dimension, 57
- Droites, équations, 104
- Droites, équations de bases, 101
- Décalage en x et y des fonctions, 102
- Décidabilité, 65
- Démonstrations
 - 1+1=2, 22
 - erronée, 23
- Déterminant
 - ordre 2, 127, 131, 236
- Déterminant nul, 160
- Déterminant, introduction, 112

- EDO
 - Sage, 225
- End of doc, 260
- Equations différentielles, 191
- Equations Transcendantes, 179
- Exercices
 - Autres systèmes à trois inconnues, 140
 - Biquadratique, 140
 - Calcul d'extremum sans dérivées, 141
 - Circuit pont H et RC, 121
 - Distance d'une droite par rapport à un point, 141
 - Désintégration radioactive, 141
 - Exponentielle passant par trois points, 141
 - Risque d'avoir un virus (Covid), 59
 - Taux d'augmentation de la surface d'une sphère, 141
 - Tourner les axes d'une parabole, 141
 - Trouver l'équation de la fonction exponentielle décalée passant pas 2 points, 140
 - Trouver l'équation de la fonction exponentielle passant pas 2 points, 140
 - Trouver équation parabole, 140

- Factorisation en radicaux, 177
- Fonction réciproque, visualisation et propriétés, 136
- Force brute, preuve, 67
- Forme quadratique, dérivée partielle par rapport à a, 167
- Fractions continues, 89
- fractions périodiques, expression du même nombre dans différentes bases, 44, 55

- Geogebra fonction complexe, 153
- Grandes suite de nombres, 66
- Grands nombres, informatique, Python, 67
- Graphique fonction complexe, 153
- Graphiques, plots, 225

- Infinité de décimales, nombres irrationnels et réels, 65
- Invariance, vecteurs propre, dilatation, 160

- knuth, notation, 73

- Launay, 22
- Liens sites online, 219
- Livres, 22
- Logique, state machine etc., 65

- Matrice identité I, 160
- Matrice non inversible, 160
- Matrices, introduction, 112

- Newcommand, 14
- Nombre d'or, algorithme fraction continue, 89
- Nombres énormes, 73
- Non linéarité, 108
- Négatifs, vrais, faux, 59, 61

- Online
 - tools
 - calculators, 219
- Outils en ligne
 - calculatrices, 219

- Padé, 186
- Padé loi normale, gauss, 187
- Par coeur, 236
- Plot easy plot on local machine with Octave, 225
- Plot fonction complexe, 153
- Positifs, vrais, faux, 59, 61
- Prime reciprocal, longue série, grandes suite de nombres, 66
- Problème $3x + 1$, 65
- Problème de l'arrêt, 65

Prévalence, [59](#)
Python, grand nombres entiers, package decimal, [67](#)

Ramanujan, [259](#)
Relatifs, nombres, [29](#)
reLu, droite et non linéarité, [108](#)
Russell, [22](#)
Règle de trois, [56](#)
Règle de trois, tableau et produit en croix, [56](#)

Signes nombres relatifs, [29](#)
Substitutions, [88](#)
Suite arithmétique, [253](#)
Suite harmoniques, [254](#)
Système linéaires, variables et inconnues, [107](#)
Système équation
 linéaires à deux inconnues, [127](#), [131](#), [236](#)
Système équations linéaires à 2 inconnues, [109](#)
Série de Engel, [90](#)
Séries, [253](#), [254](#)

Théorie
 formelle, axiomatique, [17](#)
Théorème d'Abel, [177](#)
Tracer courbes, machines locales, [225](#)
Tracer courbes, online, [220](#)
Trouver l'équation biquadratique, [140](#)
Trouver l'équation de la fonction de la droite, [106](#)
Turing, machine de, [65](#)
Tétration, colonne de puissance, [73](#)

Une poule et demie pond etc., [57](#)
Unités, [57](#)

Valeur absolue, [108](#)
Valeurs propres, [160](#)
Vecteurs propres, [160](#)

Whitehead, [22](#)

Zéro, parité, [24](#)
Zéro, signe, [29](#)

29 Index Rama.pdf

- Table of content Part I (Art 1..1267) pages .15 - .25
- (Section I : Algèbre – Section VII : Conics)
- Index proposition of Euclid Book I to VI .26 - .29
- Table of content Part II (Art 1400..6165) pages .30 - .38
- (Section VIII : Diff Calculus – Section XIV : Solid Coord Geometry)
- Errata (Art 123..5332) pages .42
- Math Tables (CGS to LOGe(N)) pages 1 - 6
- Burckhardt's Factor table (N = 1..99000) pages 7 - 29
- Log Gamma (N) pages 30 - 31
-
- ALGEBRA (Art 1..) pages 33 (77/1062) - current
- Identités remarquables pages 34-35
- Théème binomial page 53
- DIFFERENTIAL CALCUL (Art 1400..) page 257 - current
-
-
-
-

29.1 End

DRAFT